La preuve de la rotation de la Terre par la mesure de la déviation d'objets tombant dans un puits de mine

Une compétition mathématique franco-allemande entre Pierre-Simon de Laplace et Friedrich Gauß (1803)

par Anders Persson
FRMetS (Fellow of the British Royal Meteorological Society)
Université d'Uppsala (Suède)

1. D'Aristote à Galilée

Depuis le XVII^e siècle jusqu'assez tard au XIX^e siècle, la déviation des corps tombant fut un sujet ardemment débattu, d'abord pour confirmer ou infirmer la théorie copernicienne – ensuite à propos des caractéristiques de cette déviation. L'article de 1803 de Laplace, « Mémoire sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur », est une étape fondamentale de ce débat :

- Il visait à prédire la valeur de la déviation d'objets lâchés dans un puits de mine, dans le contexte d'une recherche de preuves de la rotation de la Terre ;
- Son auteur était en compétition – non officielle – avec le célèbre mathématicien allemand Friedrich Gauß qui s'était fixé le même objectif ;
- Tous deux arrivèrent au résultat correct et furent ainsi les premiers savants à découvrir et à interpréter correctement ce qui sera plus tard connu sous le nom d' « effet Coriolis ».

Les expériences de déviation des corps constituaient une réponse à un problème déjà soulevé par Aristote, puis par des opposants à la théorie de Copernic : si la Terre tournait autour de son axe, un objet lâché depuis une tour serait « laissé en arrière », c'est-à-dire dévié vers l'**ouest**. Dans l'expérience (supposée) de Galilée à la tour de Pise, les objets arrivaient au sol sans déviation mesurable : mais, selon Galilée et les héliocentristes, ce n'était pas une preuve d'une fixité de la Terre, puisque ces objets étaient entraînés par la rotation terrestre. Comme chacun pouvait le constater, un objet lâché du mât d'un bateau en mouvement tombait lui aussi au pied du mât.

2. Le modèle naïf

Le débat aurait pu s'arrêter là si les opposants à Copernic n'avaient fondé toute leur argumentation sur une éventuelle déviation vers l'ouest. Ces savants imaginaient que les objets tomberaient *de manière différente*, selon que la Terre tournait sur elle-même ou non. Et là, ils pouvaient marquer quelques points. Galilée avait lui-même admis dans son *Dialogo sopra i due sistemi del mondo* en 1632 que, comme le sommet d'une tour est plus éloigné du centre de la Terre que ne l'est sa base, la vitesse de rotation au sommet est légèrement plus grande qu'à la base, à la surface de la Terre. Un objet lâché d'en haut dépasserait alors le pied de la tour et en viendrait à tomber légèrement devant, donc à l'**est** de la tour.

Si nous mathématisons ce raisonnement, nous trouvons qu'un objet lâché d'un promontoire de 100 m de haut en Italie du Nord (à 43°N de latitude) mettra 4,515 secondes à atteindre le sol. Comme la vitesse de rotation sommitale est de 5,3 mm/s supérieure à celle de la surface, l'objet aura « avancé » de 24 mm lorsqu'il atteint le sol (figure 1).

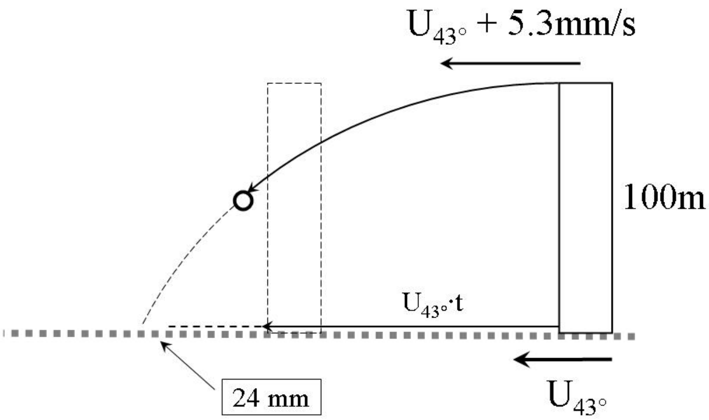


***Figure 1:* Un modèle simpliste de déviation des corps en chute verticale.** *Comme le sommet d'un bâtiment élevé se déplace, avec la rotation terrestre, à une vitesse plus grande que le bas de l'immeuble, un objet lâché du sommet arrivera, de par sa vitesse horizontale légèrement supérieure, à l'avant d'un objet se déplaçant à la vitesse de la surface terrestre.*

De telles petites déviations étaient difficilement mesurables du temps de Galilée. Pire, la déviation calculée selon ce modèle simpliste est erronée et conduit à des résultats de 50% trop importants – car nous avons négligé ici la courbure terrestre... Pendant les 4,5 s. de chute de l'objet, la tour et ce qui l'entoure se déplacent d'1,5 km vers l'est. C'est une courte distance – mais la courbure terrestre, quoique faible, ne peut plus être négligée. Mettons au crédit des coperniciens comme de leurs opposants le fait qu'ils prirent conscience de ce point, ce qui déplaça leur controverse sur *le type* de trajectoire suivie par l'objet.

3. Le débat italien

Pour simplifier le propos, tous choisirent de se concentrer sur des objets lâchés d'une tour située sur l'Équateur. Et afin de permettre aux objets de poursuivre fictivement leur trajectoire *après* leur arrivée au sol, ils imaginèrent une représentation mentale ingénieuse de la Terre, tranchée à l'Équateur en deux hémisphères.

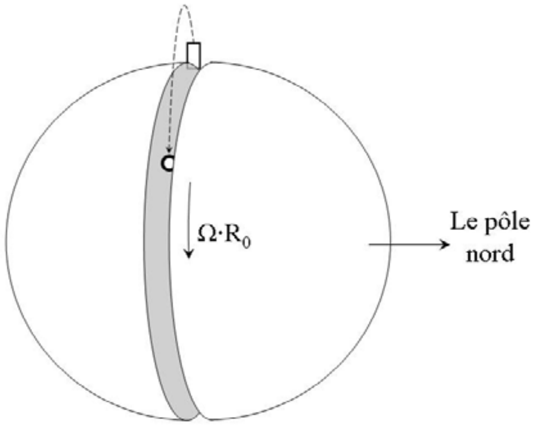


***Figure 2:* Pour permettre aux corps chutant de poursuivre leur trajectoire, les Italiens imaginèrent la Terre comme séparée en ses deux hémisphères.**

Avec une surface qui n'était plus plate mais courbée (et donc une attraction vers le centre terrestre qui variait en direction), la trajectoire ne pouvait plus être parabolique. Alors quelle était-elle ? Dans son *Dialogue* de 1632, Galilée suggéra un demi-cercle dont le diamètre serait égal au rayon terrestre. C'était pure spéculation de sa part, sans aucun fondement dans ses conceptions de la mécanique, et contraire à la vision largement acceptée d'une trajectoire spirale – vraisemblablement une spirale d'Archimède dirigée vers le centre de la Terre. Six ans plus tard, Galilée changea d'avis et se rangea à l'avis général dans son *Dialogue* de 1638. Les deux parties, les coperniciens et leurs opposants, étaient en tout cas d'accord sur le fait que l'objet arrivait (fictivement) au centre de la Terre avec une vitesse nulle.

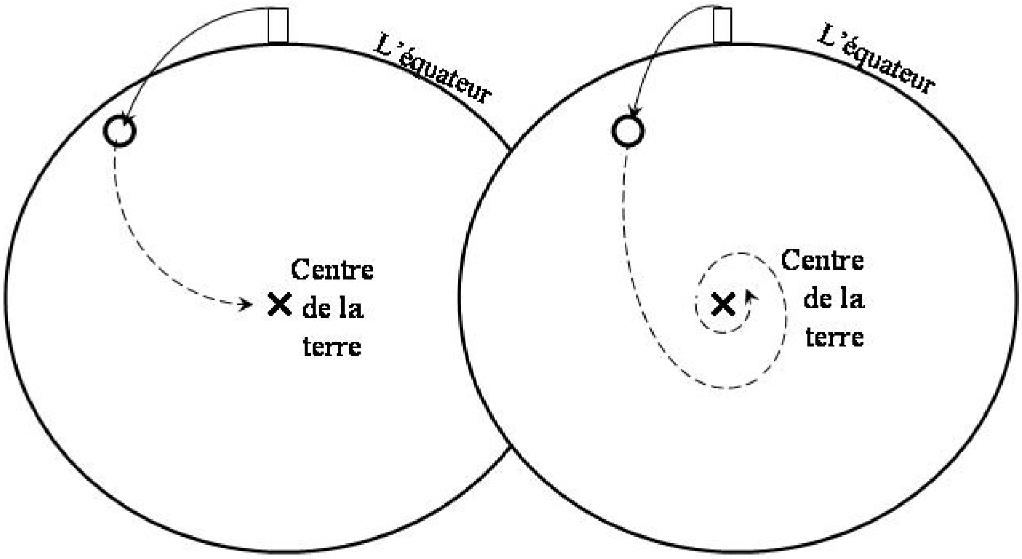


***Figure 3:* Il était pris comme postulat par les savants du premier XVII^{e} siècle qu'un objet capable de pénétrer la surface terrestre sans perte de vitesse arriverait au centre de la Terre.** *Le seul désaccord portait sur le type de trajectoire qui porterait l'objet vers le centre de la Terre. Galilée suggéra initialement un demi-cercle (à gauche), contre l'hypothèse dominante de la spirale, vraisemblablement archimédienne (à droite).*

La discussion qui s'ensuivit a été donnée par les historiens contemporains des sciences comme un cas d'école du pouvoir énorme de « l'inertie intellectuelle et mentale » et de la manière, lente et progressive, suivant laquelle même des « esprits supérieurs » réussissaient à se libérer de leur traditionnelle « *idola tribus* » – pour reprendre l'expression donnée au XVII^{e} siècle par Francis Bacon. Car de fait, ce qui recueillait l'accord de tous (l'arrivée du mobile au centre de la Terre) était *totalement erroné* ! Et erroné aussi parce que cela empêchait tout savant de calculer des solutions même approximativement correctes...

Le débat devint alors confus. Ainsi par exemple en 1667 Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) proposa-t-il une hypothèse suivant laquelle la trajectoire courbe avait une composante rectiligne uniforme, tangentielle à la Terre, et une composante accélérée vers son centre. Nous savons maintenant que c'est parfaitement correct, mais l'idée fut rejetée, aussi bien par lui que par ses successeurs, parce que dans cette hypothèse l'objet n'atteignait pas le centre de la Terre !

4. UNE FANTAISIE NEWTONIENNE

Le débat italien contamina assez vite l'Angleterre. David Gregory (1659-1708), membre de la Royal Society, en fit part à cette assemblée en 1668. Le problème suscita un vif intérêt, et en 1674 Robert Hooke publia un livre intitulé *An Attempt to Prove the Motion of the Earth*. Une des méthodes suggérées était l'observation de la déviation d'objets lâchés depuis des tours. Il avait aussi prévu de manière qualitative les lois de Newton qui apparaîtront dans les *Principia*:

- Tous les corps célestes ont une gravitation dirigée vers leur propre centre ;
- Un corps en mouvement rectiligne uniforme continue dans ce mouvement, sauf à être dévié en une trajectoire courbe par une force quelconque ;
- le plus proche est l'objet, la plus forte est l'attraction.

Hooke avait ainsi conçu la gravité comme une force attractive entraînant les objets vers le bas, plutôt qu'une « tendance à tomber » intrinsèque aux corps, comme le voulait Aristote. Hooke avait eu ces profondes intuitions grâce à de nombreuses expériences, peut-être plusieurs centaines. Son sens physique remarquable était fondé sur des analogies mécaniques plus que sur des calculs : il a eu une grande influence sur le développement de la pensée de Newton.

En novembre 1679 Hooke, fraîchement élu secrétaire de la Royal Society, écrit à Newton, en souhaitant ouvrir une discussion sur le mouvement des planètes, et notamment la cause de leur orbite elliptique. Mais Newton avait autre chose en tête, ce qu'il appelait « une fantaisie de mon cru » : *la déviation d'objets lâchés d'une grande hauteur*, comme preuve de la rotation terrestre.

Beaucoup plus tard, Isaac Newton dira à ses amis que c'était en 1666, alors qu'il regardait des pommes tomber de l'arbre dans le jardin familial, qu'il eut l'idée que les corps terrestres et la Lune obéissent aux mêmes forces gravitationnelles. Ce qui rendit de tous temps les historiens sceptiques est que Newton tint ses propos en 1726, soixante ans après l'événement relaté, et ce alors qu'il était engagé dans une querelle de priorité avec d'autres savants. En 1666, il développait des idées en optique et en mathématiques, et il n'y aucune preuve documentaire d'une idée sur la nature de la gravitation à ce moment-là. Nous savons aussi par l'histoire des sciences que des concepts théoriques si profonds naissent rarement du néant.

Cependant, si nous situons « l'événement de la chute de la pomme » 13 ans plus tard, en 1679, il gagne beaucoup en crédibilité. Newton avait passé la plus grande partie de l'été dans sa maison familiale du Lincolnshire. Sa mère venait de mourir, et il devait s'occuper d'affaires familiales : il y aurait alors eu beaucoup d'occasions de voir des pommes tomber dans ce jardin-là.

5. La trajectoire elliptique

La correspondance qui s'en suivit avec Hooke pendant l'hiver 1679-1680 montre que Newton n'avait pas encore une compréhension très profonde de la mécanique céleste. Sa première idée avait été – conformément à l'opinion scientifique de son temps – qu'un corps chutant aurait une trajectoire spirale vers le centre de la Terre. Grâce à Hooke il en vient à comprendre que le corps suivrait plutôt une trajectoire elliptique (figure 4).

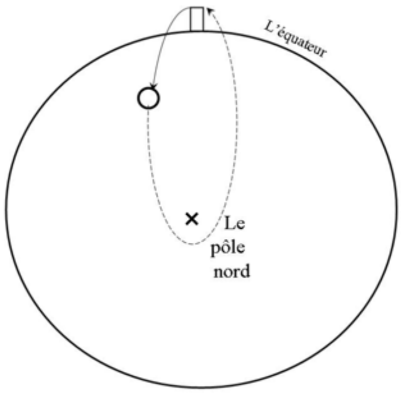


***Figure 4:* Hooke et Newton étaient d'accords au sujet de la trajectoire elliptique d'un corps tombant, soumis à l'attraction de gravitation terrestre.**

À partir de ces prémisses – une corps en chute suit le même type d'orbite que celle des planètes autour du Soleil, il n'était pas aberrant d'inférer que les mouvements de ces différents corps sont régis par la même loi – la gravitation *universelle*. Néanmoins, même un génie comme Newton mit quelques années de plus à aboutir à cette conclusion dans les *Principia*.

6. Gauß et Laplace

Plus d'un siècle après, on assiste à un regain d'intérêt pour la déviation des corps tombant. L'aplatissement des pôles s'était trouvé être une preuve de la rotation terrestre, ce qui avait tranché le conflit sur le sujet. Mais c'était en quelque sorte une preuve indirecte...

En 1803, a lieu en Allemagne une expérience de lâché de scories de fer dans un puits de mines de 90 m de profondeur. L'expérience suscite l'intérêt de la communauté scientifique ; le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauß, âgé de 24 ans, et le mathématicien français Pierre-Simon de Laplace, âgé de 53 ans, relevèrent le défi du calcul de la déviation attendue.

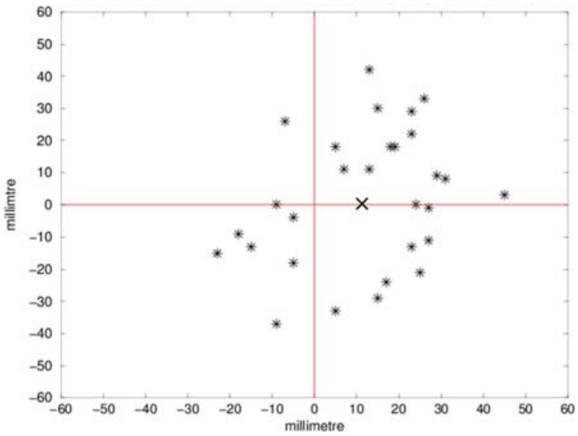


***Fig.5:* Le schéma des chutes dans l'expérience de 1803 de Schlebusch.** *La croix indique la déviation théorique.*

La compétition était déjà engagée sur un autre sujet, puisque l'année précédente, Gauß avait réussi à calculer l'orbite de l'astéroïde Cérès, nouvellement découvert – ce que Laplace avait estimé impossible. Sur la chute des corps, les deux savants donnèrent la réponse correcte, en dérivant l'équation tridimensionnelle complète d'un mouvement sur la Terre en rotation.

Ils notèrent spécifiquement que les termes de Coriolis (comme nous les appelons maintenant)[1] étaient à l'origine de la déviation. Gauß et Laplace furent donc les premiers savants à donner cette preuve de la rotation terrestre quelques 50 ans avant l'expérience du pendule de Foucault, et à analyser correctement le mouvement relatif aux repères en rotation, 30 ans avant l'article mathématique de Coriolis.

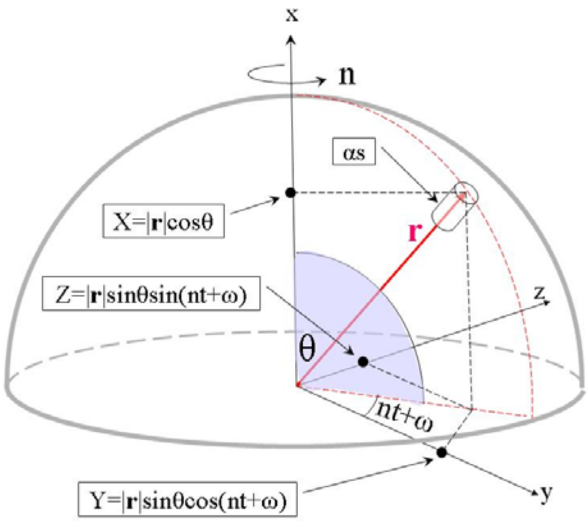
7. La dérivation par Laplace, comparée à celle d'aujourd'hui

Ce qui rend la dérivation de Laplace difficile à suivre pour le lecteur moderne est:

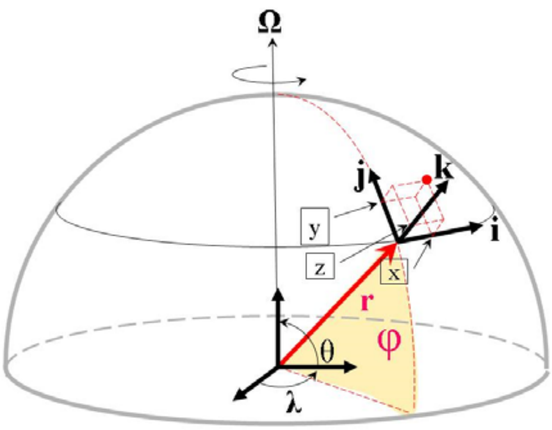
- Le manque d'illustrations. Dans la figure 6, nous avons tenté de montrer visuellement ce que Laplace avait en tête.
- Les notations mathématiques d'époque. Laplace définit par exemple la latitude comme l'angle depuis l'axe de rotation de la Terre (en fait, pour nous, la colatitude), alors que nous le mesurons depuis l'Équateur.

1. Sur le texte de 1835 de Coriolis, voir l'analyse *BibNum* d'A. Moatti, octobre 2011 (lien).

- L'utilisation de formes cartésiennes de coordonnées. Ce n'est qu'au cours du XIX[e] siècle que des physiciens (et non des mathématiciens) britanniques, allemands et américains développèrent, pour des raisons pratiques et afin de faciliter les interprétations, le système de notation vectorielle moderne.
- Pour obtenir l'estimation la plus exacte possible, Laplace avait voulu aussi prendre en considération la résistance de l'air.
- Il voulait enfin, au moyen de calculs les plus détaillés possible, vérifier s'il y avait une possible déviation, mineure, vers le sud.



<u>Figure 6:</u> Le modèle de calcul de Laplace pour la Terre, avec une tour à la colatitude θ (correspondant à la latitude 90-θ).



<u>Figure 7 :</u> Le système moderne de coordonnées sphériques θ, λ et r. *Localement, un système de coordonnées cartésiennes en x, y et z peut aussi être défini.*

La dérivation de Laplace s'opère de manière analogue aux dérivations modernes : une transformation des coordonnées d'un repère absolu vers un repère relatif en rotation. La transformation du vecteur **A** telle qu'observée dans le repère absolu (il affecte au vecteur les coordonnées *x, y* et *z*) et dans le repère relatif (il affecte les coordonnées *X,Y* et *Z*), tournant à vitesse angulaire **Ω** est décrite par la très puissante relation suivante:

$$\left(\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}}\right)_{abs} = \left(\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}}\right)_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A} \qquad (1)$$

A représente n'importe quel vecteur, choisissons le vecteur position **r** :

$$\left(\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}}\right)_{abs} = \left(\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}}\right)_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \qquad (2a)$$

ou, en notant **v** la vitesse

$$\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \qquad (2b)$$

On applique ensuite *(1)* à la vitesse absolue, d'où:

$$\left(\frac{\mathbf{dv}_{abs}}{\mathbf{dt}}\right)_{abs} = \left(\frac{\mathbf{dv}_{abs}}{\mathbf{dt}}\right)_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{abs} \qquad (3)$$

En replaçant *(2b)* du côté droit de *(3)*, on obtient:

$$\left(\frac{\mathbf{dv}_{abs}}{\mathbf{dt}}\right)_{abs} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\right)_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \qquad (4)$$

d'où

$$\left(\frac{\mathbf{dv}_{abs}}{\mathbf{dt}}\right)_{abs} = \left(\frac{\mathbf{dv}_{rel}}{\mathbf{dt}}\right)_{rel} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \qquad (5)$$

Ainsi donc *dans un repère absolu:*

$$\mathbf{acc}_{abs} = \mathbf{acc}_{rel} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \qquad (6a)$$

Cependant, nous sommes intéressés par les accélérations dans le repère relatif:

$$\mathbf{acc}_{rel} = \mathbf{acc}_{abs} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{rel} - \mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \qquad (6b)$$

où $-2\ \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{rel}$ représente *la force de Coriolis* (par unité de masse) déviant le mouvement vers sa droite et – **Ω × Ω × r l'accélération** *centrifuge*, dirigée vers l'extérieur, éloignant le mobile de l'axe de rotation terrestre.

@@@@@@@

On peut trouver algébriquement les composantes de cette accélération en développant le produit vectoriel :

$$-2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_{rel} = -2\Omega\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ u_{rel} & v_{rel} & w_{rel}\end{vmatrix} = \qquad (7)$$

$$-(2\Omega w_{rel}\cos\varphi - 2\Omega v_{rel}\sin\varphi)\,\mathbf{i} - 2\Omega u_{rel}\sin\varphi\,\mathbf{j} + 2\Omega u_{rel}\cos\varphi\,\mathbf{k}$$

Ce qui conduit à une déflexion du mouvement est-ouest (ou mouvement latitudinal u_{rel}) dans deux directions – celles où le terme u_{rel} apparaît : en direction N-S, ou direction méridionale (**j**), avec une valeur $-2\Omega u_{rel}\sin\varphi$; et dans la direction verticale (**k**) avec une valeur de $2\Omega u_{rel}\cos\varphi$. La première déflexion, bien connue, est l'effet Coriolis, la seconde est « l'effet Eötvös » qui explique pourquoi les mouvements horizontaux vers l'est ou l'ouest rendent un objet plus léger ou plus lourd. Le mouvement méridional (v_{rel}) ne sera quant à lui défléchi que dans la direction est-ouest (**i**), avec une valeur de $2\Omega v_{rel}\sin\varphi$; il en est de même du mouvement vertical (w_{rel}), avec une déflexion d'une valeur de $\Omega w_{rel}\cos\varphi$.

$$0 = \alpha\frac{dds}{dt^2} + 2\alpha n\frac{dv}{dt}.\,\mathrm{Sin.}^2\,\theta + \alpha K\frac{ds}{dt} - g\,;$$

$$0 = \alpha\frac{ddu}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv}{dt}.\,\mathrm{Sin.}\,\theta.\,\mathrm{Cos.}\,\theta + \alpha K\frac{du}{dt} - g\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$$

$$0 = \alpha\frac{ddv}{dt^2}.\,\mathrm{Sin.}\,\theta + 2\alpha n\frac{du}{dt}.\,\mathrm{Cos.}\,\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}.\,\mathrm{Sin.}\,\theta + \alpha K\frac{dv}{dt}.\,\mathrm{Sin.}\,\theta - \frac{g}{\mathrm{Sin.}\,\theta}.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)$$

***Figure 8:* Décomposition par Laplace de la déviation totale en chacun de ses composants (p.112).** *Les notations* s, u *et* v *sont des distances. La vitesse de rotation, Ω en notation moderne, est ici notée* n. *Laplace a aussi tenu compte du frottement de l'air, donné par les termes en* K *: en fait, cette composante a très peu d'effet sur la déviation.*

8. L'INTERPRÉTATION DU TERME -2 Ω × V

L'effet Coriolis a été découvert au XIXe siècle – depuis lors mathématiciens et physiciens se sont battus pour trouver une explication intuitive qui soit satisfaisante : pourquoi un «– 2 », et pourquoi un produit vectoriel ? À ce stade personne n'y est réellement parvenu ; donc acceptons ce terme tel qu'il apparaît... D'un autre côté, il est assez facile de comprendre ce que signifie en termes physiques la valeur **$-2\,\Omega\times V_{rel}$**. Grâce à la notation vectorielle qui fut justement développée pour faciliter l'interprétation physique, on peut écrire :

Tous les mouvements relatifs *V_{rel}* (ou les composantes de ces mouvements) perpendiculaires à l'axe de rotation Ω seront déviés, perpendiculairement à la fois au mouvement (V_{rel}) et à l'axe Ω, vers la droite (pour une rotation antihoraire)[2]. Tandis qu'un mouvement (ou composante de mouvement) parallèle à l'axe de rotation ne sera pas dévié (figure 9).

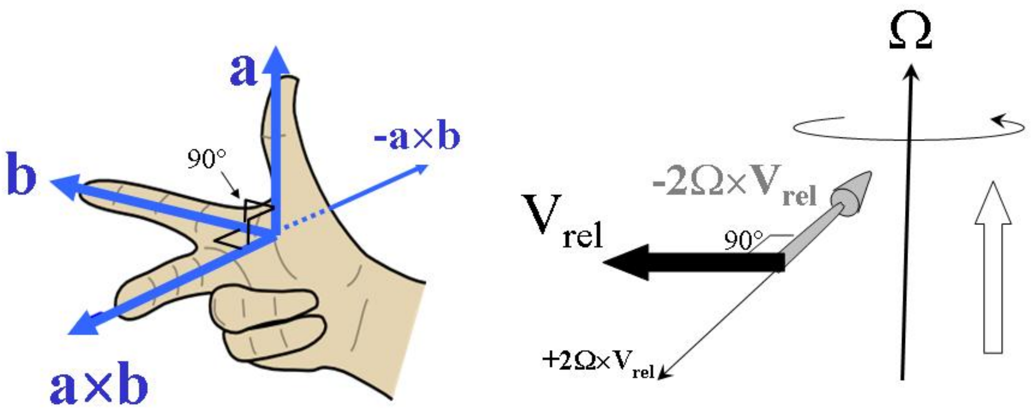


***Figure 9:* La correspondance entre les vecteurs a, b et leur produit vectoriel a×b est donnée par la règle de la main droite (à g.).** *De là, il est facile de voir (à dr.) comment le mouvement relatif V_{rel} , vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation Ω, est dévié d'une valeur de $-2\Omega\times V_{rel}$. Les mouvements parallèles à l'axe ne seront pas déviés, comme l'indique la flèche blanche à l'extrême droite.*

Plus spécifiquement : pour un mouvement vertical w, avec la convention $w>0$ pour un mouvement ascendant, on peut écrire la vitesse en chute libre (w<0) par la formule $w= -g.t$. Elle peut être séparée en une composante $w{\cdot}sin\varphi{\cdot}g{\cdot}t$ parallèle à l'axe terrestre et une autre composante $w{\cdot}cos\varphi{\cdot}g{\cdot}t$ perpendiculaire. Seule cette deuxième composante sera déviée (vers sa droite) par l'effet Coriolis.

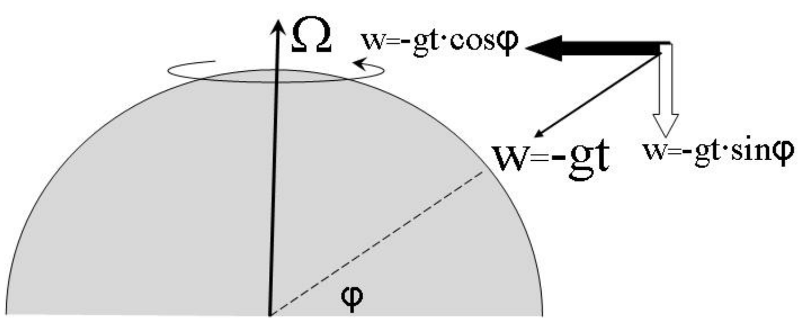


***Figure 10 :* La vitesse d'un corps en chute libre –gt peut être décomposée n un terme perpendiculaire à l'axe terrestre et un terme parallèle.** *Seul le premier subira une déviation.*

2. C'est bien le cas de la rotation terrestre: d'ouest vers est, vu du dessus, c'est une rotation antihoraire (voir aussi figure 9).

9. LA DÉVIATION SELON L'EFFET CORIOLIS

Nous pouvons à présent, comme Laplace (ainsi que Gauß) en 1803, calculer la déviation d'un objet tombant. Notons d'abord que le temps *t* pris par un objet pour tomber d'une hauteur *h* est :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (8a)$$

sa vitesse va croître selon la formule :

$$V_0 = g \cdot t \qquad (8b)$$

et quand il touche le sol, il aura une vitesse de :

$$V_0 = \sqrt{2hg} \qquad (8c)$$

ou

$$h = \frac{V_0}{2g} \qquad (8d)$$

Pour la clarté d'exposition, les dérivation seront menées pour une chute à l'Équateur (φ=0, sinφ=0, cosφ=1). Pour un calcul à une autre latitude, on peut remplacer Ω par $\Omega cos\varphi$.

Pour cet objet en chute verticale, la déviation est (section 8) de $-2\Omega\times w$, avec $w = -g \cdot t$; ce qui peut aussi être écrit comme une dérivée seconde de la position S :

$$\frac{dS^2}{dt^2} = +2\Omega \cdot gt \qquad (9a)$$

En intégrant *(9a)* en fonction du temps, pour une chute depuis une hauteur *h*, avec une vitesse horizontale initiale de V_0, conduit à

$$\frac{dS}{dt} = V_0 + \Omega \cdot gt^2 \qquad (9b)$$

Or en fait la vitesse initiale V_0 = 0, d'où par intégration :

$$S = S_0 + \Omega \cdot \frac{gt^3}{3} \qquad (9c)$$

En prenant comme point de départ des distances le pied de la tour, alors S_0 = 0, et *(8a)* donne :

$$S = \frac{+\Omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}} \qquad (10)$$

Ce qui correspond exactement au résultat de Laplace p.115 (sachant que nous avons pris $\sin\theta = 1$):

$$\frac{2\,nh}{3} .\ \mathrm{Sin.}\ \theta .\ \sqrt{\frac{2\,h}{g}} .$$

C'est à nouveau une explication plutôt mathématique de la déviation, avec peu de « sens » physique. Mais, comme souvent en physique, il y a plus d'une dérivation mathématique possible pour le même processus. Faisons les dérivations à la Newton et à la Kepler – comme ceux-ci les auraient faites s'ils y avaient pensé !

Alors que la dérivation que nous venons de faire en utilisant l'effet Coriolis était conduite dans un repère relatif – celui de la Terre sur laquelle nous nous placions, en suivant sa rotation –, nous allons maintenant nous situer dans un repère absolu, en dehors de la Terre, en regardant la chute d'objets et la façon dont ils sont emmenés par la rotation terrestre.

10 . La déviation selon les lois de Newton

Pour notre première dérivation newtonienne, nous utiliserons l'idée (émise avant Newton) selon laquelle la courbure terrestre affecte le corps en chute par un composant gravitationnel dirigé « vers l'arrière », qui en fait le retarde, en comparaison du modèle simpliste présenté en figure 1.

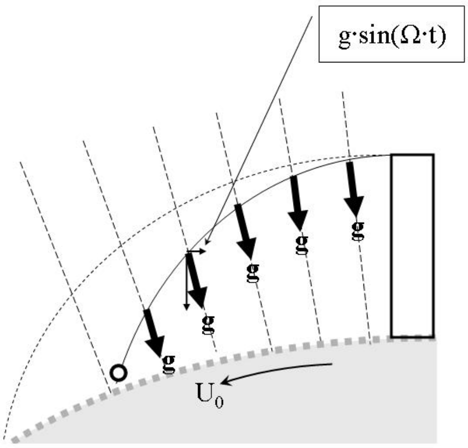


***Fig. 11:* À la différence de la figure 1, où les lignes de champs gravitationnel étaient parallèles et la trajectoire une parabole, dans ce cas de lignes de champ radiales, la trajectoire est en principe une ellipse.**

Le calcul de cette accélération arrière peut être simplifié grâce à la petitesse de l'angle $\Omega \cdot t$:

$$a = -g \sin \Omega t \approx -g \Omega t = \frac{d^2 S}{dt^2} \qquad (11a)$$

ce qui par intégration conduit à :

$$\frac{dS}{dt} = U - \frac{g \Omega t^2}{2} = \Omega (R + h) - \frac{g \Omega t^2}{2} \qquad (11b)$$

où $U = \Omega\,(R+h)$ est la valeur de la rotation terrestre à la hauteur h. Finalement l'on obtient :

$$S = \Omega (R + h) t - \frac{g \Omega t^3}{6} \qquad (11c)$$

Mais le point de la surface terrestre vers lequel se dirige le mobile est lui-même en mouvement à une vitesse $U_0 = \Omega \cdot R < U$. Cette différence de vitesse $U - U_0 = \Omega h$ amène le mobile en-deçà du pied de la tour, à une distance de :

$$\Delta S = \Omega \cdot h \cdot t - \frac{g \Omega t^3}{6} \qquad (11d)$$

En insérant *(8a),* on retrouve :

$$\Delta S = \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{\Omega}{6} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} = \frac{\Omega}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \qquad (12)$$

Si seulement Newton avait examiné de manière plus tenace le problème de la *déviation* de ses fameuses pommes détachées de leur arbre, il aurait été capable de dériver la formule *(12)* déjà au XVII[e] siècle, et peut-être aussi de découvrir l'effet Coriolis. Mais il n'aurait pas été forcément le seul : Kepler aurait pu lui aussi le faire 50 ans auparavant.

11 . La déviation selon la 2nde loi de Kepler (loi des Aires)

Cette 2nde loi de Kepler, suivant laquelle le rayon-vecteur décrit des aires égales en des temps égaux, n'était pendant longtemps supposée s'appliquer qu'aux corps célestes : planètes, comètes. Au cours du XVIIe siècle, cette loi n'était pas unanimement comprise ni acceptée, même par Newton. Ce ne fut qu'à partir de son travail sur les "*Principia*" au milieu des années 1680 qu'il comprit la validité de cette loi, mais aussi ses considérants. Ce ne fut, par exemple, que lorsqu'il remit en cause un concept important de la théorie de Kepler (celui selon lequel la trajectoire d'une planète en orbite a son foyer non au centre du Soleil comme imaginé par Kepler, mais au *centre de gravité commun* de la planète et du Soleil) qu'il fut capable de formuler sa propre loi.

Kepler n'avait jamais imaginé étendre la validité de sa théorie au voisinage terrestre. Ce n'est qu'au cours du XVIIIe siècle qu'il a été réalisé que sa seconde loi, dite « loi des Aires », pouvait aussi être appliquée aux objets terrestres, sous forme d'une loi de *conservation du moment angulaire*.

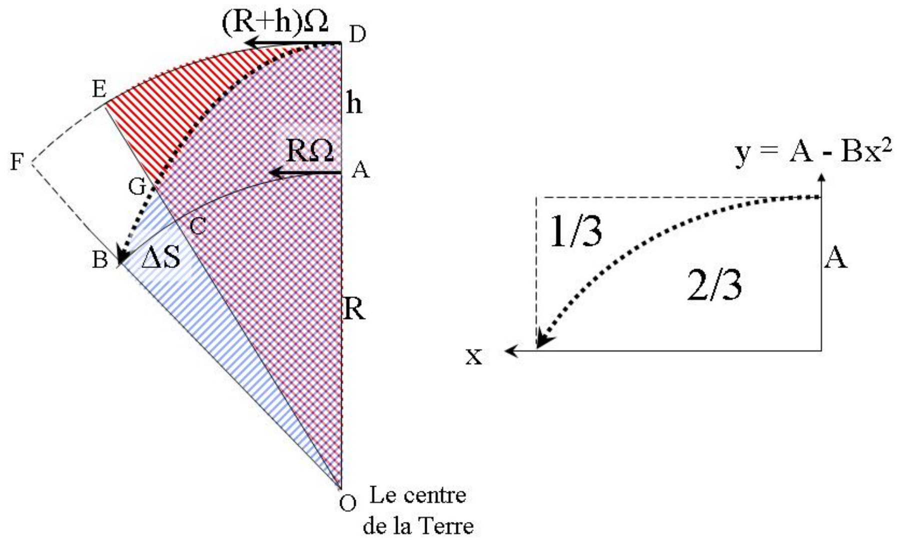


***Figure 12a:** Le corps tombant suit la trajectoire **DGB**, alors que le sommet de la tour suit la trajectoire **DE**, et la base la trajectoire **AC**. 12b: Toute parabole inscrite dans un rectangle occupe les 2/3 de l'aire de celui-ci.*

Notre objet tombant suit une trajectoire absolue DGB, alors que le pied de la tour suit AC (figure 12a). Suivant la seconde loi de Kepler, les deux surfaces ODBO (hachurée en bleu et violet) et ODEO (en rouge et violet) sont égales ; et par ailleurs l'objet tombant au point B dépasse donc la tour d'une distance CB=ΔS.

De cette égalité d'aires on déduit que les deux aires ODGO (hachurée en violet) et DEGD (en rouge) sont égales. On leur ajoute ensuite à chacune l'aire (blanche) GEFB, ce qui donne aire DFBD = aire OEFO.

Considérant h << R, et la petitesse des angles en cause (bien plus petits que sur la figure !), nous prenons l'approximation BG ≈ BC ≈ FE ≈ ΔS, principalement en négligeant l'aire GBC ≈ 0 en en traitant GEFB comme un rectangle d'aire ≈ h·ΔS, avec l'aire OEFO ≈ ΔS (h+R)/2.

De notre discussion précédente (fig. 4), nous savons que la trajectoire est une ellipse, mais pour les très courtes durées sur lesquelles nous raisonnons là – à peine quelques secondes –, nous pouvons considérer la trajectoire comme parabolique. Pour la même raison, nous pouvons considérer DFBA comme un rectangle d'aire =*(R+h)Ω·t*. De la règle géométrique d'une parabole inscrite dans un rectangle (fig. 12b), nous pouvons calculer de manière approximative l'aire DFBD = *h·(R+h)·Ω·t/3*, et nous avons :

$$\frac{(R+h)\Delta S}{2} \approx \frac{h\cdot(R+h)\cdot\Omega\cdot t}{3} \qquad \textit{(13a)}$$

ce qui conduit de nouveau, en insérant *(8),* à :

$$\Delta S \approx \frac{2h\cdot\Omega\cdot t}{3} = \frac{\Omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}} \qquad \textit{(13b)}$$

12. Un complément donné par Laplace pour les objets projetés verticalement.

Quand Laplace publia ses *Œuvres* en 1805, il modifia légèrement son article de 1803, en incluant l'analyse de la déviation d'un objet lancé verticalement vers le haut (tel un boulet de canon par exemple). Cette nouvelle version peut être trouvée sous la référence « De la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur », *Traité de Mécanique Céleste*, TIV, Seconde Partie, Livre X, p. 294-305[3].

3. La version de 1805 (Google Books) correspond dans sa première partie (§15, p. 294-302) à l'article de 1803 (avec quelques révisions); la seconde partie (§16, p. 302-305) est un addendum où Laplace discute le sujet que nous évoquons.

294 MÉCANIQUE CÉLESTE,

CHAPITRE V.

De la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur.

15. Un corps qui, partant de l'état de repos, tombe d'une grande hauteur, s'éloigne sensiblement de la verticale, en vertu du mouvement de rotation de la terre; cet écart bien observé est donc propre à manifester ce mouvement. Quoique la rotation de la terre soit maintenant établie avec toute la certitude que les sciences physiques comportent; cependant, une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. Afin que

De telles expériences étaient en fait conduites depuis le début du XVIIe siècle. En 1627, un mathématicien allemand d'Ulm, Joseph Furtenbach, tira des boulets de canon vers le haut et, certain qu'ils ne retomberaient pas droit, grimpait juste après le tir pour s'installer sur la bouche du canon. La même expérience fut menée en 1634 par Mersenne, à la demande de Descartes. Les étudiants de Galilée à Florence menèrent aussi dans les années 1650 une expérience où le canon était monté sur une voiture tirée par six chevaux rapides, afin de voir si cette vitesse conduisait à un résultat différent d'un tir au repos.

Les résultats étaient en général non conclusifs. Il arrivait que les boulets de canon fussent perdus, et ceci accréditait la fallacieuse croyance suivant laquelle ils échappaient à la gravitation terrestre et partaient dans le cosmos pour ne plus revenir. Il est plus vraisemblable qu'ils étaient emmenés assez loin par les forts vents qu'ils rencontraient dans l'atmosphère.

@@@@@@@

Reprenons à présent la dérivation à la Coriolis faite par Laplace en 1803, et voyons comment elle aurait pu être faite dans un mode newtonien ou képlerien. L'accélération de Coriolis avec vitesse initiale V_0 s'écrit :

$$\frac{dS^2}{dt^2} = -2\Omega \cdot (V_0 - gt) \qquad (14a)$$

d'où, en intégrant

$$\frac{dS}{dt} = -2\Omega \cdot V_0 \cdot t + \Omega g t^2 \qquad (14b)$$

et enfin

$$S = -\Omega \cdot V_0 \cdot t^2 + \frac{\Omega g t^3}{3} \qquad (14c)$$

La valeur du temps telle que présentée en *(8b)* doit être multipliée par deux, puisque le temps mis par le projectile pour atteindre la hauteur *h* puis redescendre est le double du temps de chute d'une hauteur *h*. Ce qui donne :

$$t = \frac{2V_0}{g} \qquad (15)$$

et donc, en reportant dans *(14c)*, une déviation de :

$$S = \frac{-\Omega \cdot V_0 \cdot 4V_0^2}{g^2} + \frac{\Omega g 8 V_0^3}{3g^3} = -\frac{4}{3}\frac{\Omega V_0^3}{g^2} \qquad (16)$$

Puisque S < 0, la déviation se fait cette fois-ci vers l'**ouest**. Ce résultat mérite d'être expliqué plus avant. Pour un projectile tiré dans l'air et retombant ensuite, on pourrait s'attendre à ce que la déviation durant la chute compense la déviation durant l'ascension.

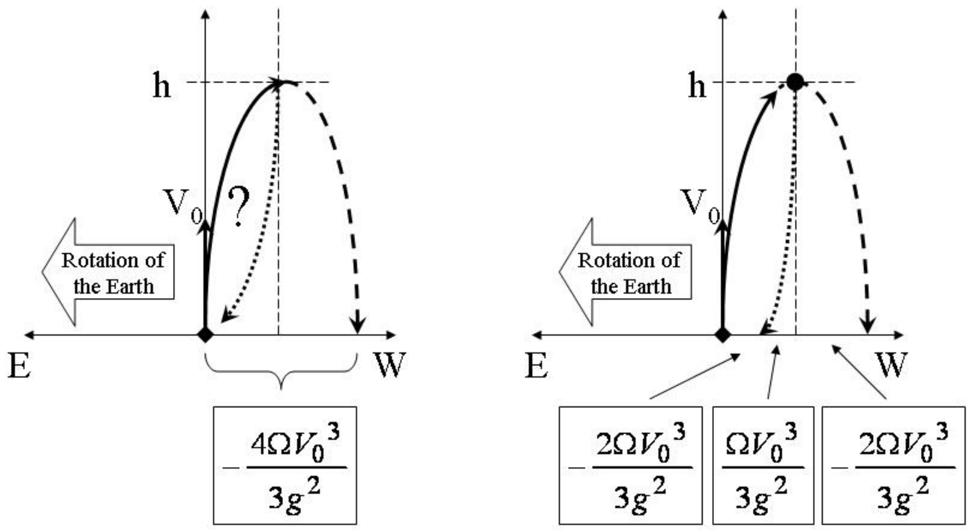


Figure 13:* La trajectoire relative, à la fois au canon et au sol, d'un objet projeté verticalement avec une vitesse initiale V_0. *À g. : *Pourquoi ne serait-il pas dévié dans l'autre sens, en retombant sur le sol ?* ***À dr. :*** *Un objet lâché de la même hauteur retomberait à l'est, mais cette déviation vers l'est n'est pas assez importante pour compenser la première déviation vers l'ouest. De plus, comme le corps projeté se meut vers l'ouest quand il atteint son apogée, alors que le corps simplement relâché est au départ au repos, la situation n'est pas la même.*

Imaginons que notre projectile envoyé vers le haut s'approche par hasard à son apogée d'un autre corps, relâché de la même hauteur en chute libre. Comme tous deux sont en phase descendante, on attendrait que leurs trajectoires soient très voisines. Mais le projectile parti du sol a, arrivé à son apogée, une vitesse horizontale vers l'ouest, causée par l'effet Coriolis. La déviation vers l'est de l'objet simplement lâché d'en haut ne sera en tout état de cause que de la moitié de la déviation vers l'ouest qu'elle serait supposée compenser (figure 13).

13. La déviation d'objets projetés verticalement, selon les lois de Newton

À présent, dans un repère absolu, selon les lois de Newton, la déviation arrière due à la courbure terrestre, vaut, comme précédemment évoqué :

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -g\Omega t \qquad (17a)$$

$$\frac{dS}{dt} = \Omega R - \frac{g\Omega t^2}{2} \qquad (17b)$$

$$S = \Omega Rt - \frac{g\Omega t^3}{6} \qquad (17c)$$

en reprenant pour le temps l'expression *(15)* ci-dessus

$$S = \Omega Rt - \frac{4}{3}\frac{\Omega V_0{}^3}{g^2} \qquad (18)$$

Ainsi, alors que le canon tourne à une vitesse de *ΩRt* avec la Terre en rotation, le boulet tiré *verticalement* retombe légèrement derrière le canon ($S < \Omega Rt$).

14. La déviation d'objets projetés verticalement, selon la 2nde loi de Kepler

En utilisant cette loi de Kepler des aires égales, nous pouvons immédiatement voir que le canon va dépasser le projectile tiré verticalement, puisque l'aire OADBO = area OACO. Les deux ont en commun l'aire OABO (violette) ; donc nous nous concentrons sur l'aire (rouge) OBCD=$R\cdot\Delta S/2$ et l'aire (bleue) ADBA=$2\Omega\cdot R\cdot t\cdot h/3$

suivant la formule de la parabole (ici approximant l'ellipse) inscrite dans un rectangle.

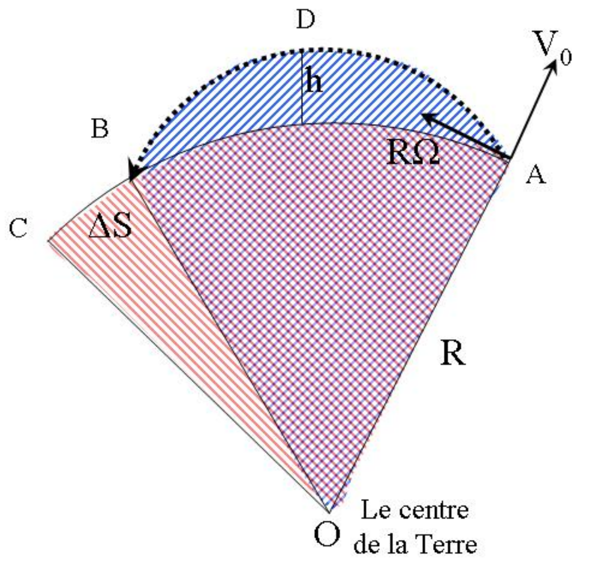


***Figure 14:* La trajectoire du corps projeté, ADB, vue dans un repère absolu.**
Pendnant la même durée, la position de la base de lancement (le canon) a avancé sur une distance plus longue, ABC. *Dans les deux cas, le rayon-vecteur couvre la même aire :* OADB=OABC. *La trajectoire* ADB *est en réalité une ellipse mais peut ici être assimilée à une parabole.*

Avec *(8a)* et *(15)* on intègre suivant les deux périodes de temps pour aboutir à nouveau à la même formule :

$$S = \Omega R t - \frac{4}{3}\frac{\Omega V_0{}^3}{g^2}$$

À cette époque, un canon avait une vitesse de sortie (V_0) d'environ 400 m/s. Un angle de lancer de 45° signifie une vitesse horizontale et une vitesse verticale égales à $V_{0H} = V_{0V} = 283$ m/s. L'obus – ou grenade – mettra 29 secondes pour atteindre son apogée à 4 km de hauteur, et 58 secondes à atteindre sa cible (en négligeant le frottement de l'air), qui sera située à un peu plus de 16 km. L'obus arrivera en fait en-deçà de sa cible d'une distance de 45 m – ceci dans une région équatoriale, avec $2\Omega sin\varphi = 0$, et donc sans déflexion horizontale.

Si nous montons à présent à une latitude italienne de 43°, avec $\Omega cos\varphi = 0.53{\cdot}10^{-4}$ /sec, le projectile arrivera en-deçà de sa cible d'une distance de 17 m. Mais, comme $2\Omega sin\varphi = 1.00{\cdot}10^{-4}$ /sec, il subira aussi une déflexion de 47 m sur le côté.

15. Autres aspects de la dérivation de Laplace

Comme indiqué en introduction, Laplace fit ses dérivations de manière consciencieuse, essayant de prévoir les effets du frottement, ainsi que toute déviation vers le sud. Nous n'entrerons pas dans ces détails, mais mentionnerons simplement que le frottement, selon Laplace, n'a pas de conséquence significative sur la déviation.

Concernant une déviation possible vers le sud, ou plutôt dirigée vers l'Équateur – un sujet de controverse il y a 200 ans déjà –, les calculs de Laplace ne montrent pas d'effet, mais ceux de Gauß oui ; ceci continue à être un sujet controversé de nos jours. Une part du problème est de définir ce que signifie « vers le sud » : est-ce en relation avec la latitude ou avec la forme effective de la Terre ?

Laplace et Gauß ignoraient bien sûr les travaux ultérieurs de géodésie, qui définirent plus précisément la forme de la Terre. De nos jours, la sagesse la plus communément acceptée est que cette déviation-là n'existe pas, ou est d'ordre équivalent à celui des approximations mathématiques indispensables... De fait, des expériences contemporaines n'ont pas permis de mettre en évidence une quelconque déviation vers le sud.

16. Pourquoi cela prit-il presque 200 ans ?

Nous avons donc montré que les expressions correctes pour la déviation d'un objet tombant auraient pu être déduites 100 ans auparavant par Newton, si ce n'est 200 ans auparavant par Kepler. Alors pourquoi ne le firent-ils pas ?

Dans le cas de Newton, ce fut parce que personne ne le lui demanda. La déviation des corps tombant avait été, comme nous l'avons vu, une priorité de la communauté scientifique au XVII^{e} siècle, mais des calculs simplistes (figure 1) avaient conduit à des valeurs très faibles. Les expériences de Hooke avaient montré une grande dispersion, et le sujet avait alors été considéré comme impossible à traiter scientifiquement.

Mais les expériences de Benzenberg (figure 5) elles aussi montraient une grande dispersion, comme celles de Reich dans une expérience ultérieur de 1834. À cette époque cependant, la compréhension des erreurs statistiques avait progressé scientifiquement : il devenait plus naturel de calculer une moyenne de mesures.

En effet, jusque tard dans le XVIII^{e} siècle, les savants, notamment les astronomes, avaient pris l'habitude d'essayer de trouver, parmi leurs nombreuses mesures ou observations, lesquelles étaient « les meilleures ». Combiner des observations ajouterait à l'erreur, croyait-on. Grâce à Laplace, à Gauß, à Legendre[4] et à d'autres, on comprit le caractère aléatoire des erreurs, et que la combinaison d'observations neutraliserait dans une certaine mesure les marges d'erreur, amenant à des moyennes finalement plus précises que n'importe quelle mesure choisie au hasard.

Quant à Kepler, la raison pour laquelle Kepler il n'aurait pas été capable d'appliquer sa deuxième loi est, on l'a vu, sa focalisation sur les corps célestes – il pensait que ses travaux ne s'appliquaient pas aux corps terrestres. Leur validité universelle n'apparut qu'après la publication des *Principia* de Newton. Avant cela, des doutes étaient même émis sur leur validité tout court, sous prétexte que ces lois avaient été inférées par l'observation d'une planète unique, Mars, à l'excentricité trop marquée.

Finalement, Laplace et Gauß ont réussi à déduire ce que nous appelons à présent « effet Coriolis » quelques 30 années avant Coriolis. Pourquoi n'ont-ils pas été crédités de cela, au moins pour l'un des deux ? Une raison pourrait être que l'œuvre de Coriolis traitait du mouvement des machines, et pouvait apparaître moins spécifique que ces calculs de Laplace ou de Gauß. Mais plus vraisemblablement, l'intérêt pour le mouvement relatif dans des repères en rotation ne se manifesta vraiment – et comment ! – qu'après l'expérience du pendule de Foucault, en 1851. Dans les discussions qui suivirent immédiatement, l'article de 1835 de Coriolis se trouvait être bien présent à l'esprit des savants, car il avait été écrit quelques années auparavant. Le mathématicien français Joseph Bertrand allégua alors que Coriolis avait plagié Alexis Clairault, qui aurait obtenu les mêmes résultats 100 ans avant lui. Il y a matière à revenir sur ce point précis dans une contribution ultérieure...

■

(août 2014)

(traduit en français par Alexandre Moatti, publié en mars 2015)

4. Sur Legendre et sa méthode des moindres carrés pour la résolution approchée des systèmes surdéterminés (plusieurs mesures du même événement), voir l'analyse *BibNum* de J.-J. Samueli, août 2010 (lien).