Autour de la seconde formule de la moyenne : un article de Paul Mansion paru dans la revue *Mathesis* en 1885

par Hervé Le Ferrand
Institut de Mathématiques de Bourgogne (UMR CNRS 5584),
Université de Bourgogne

***Figure 1 :* Paul Mansion (1844-1919)** *(source : Mac Tutor)*

En 1885, le mathématicien belge Paul Mansion publie dans la revue *Mathesis* un article sur la seconde formule de la moyenne. Ce texte est particulièrement intéressant car Paul Mansion reproduit une nouvelle preuve du second théorème de la moyenne que vient de lui communiquer le célèbre mathématicien allemand Léopold Kronecker (1823-1891). Après avoir montré toute l'importance de cette démonstration inédite, Paul Mansion discute des différentes hypothèses qui permettent d'arriver à l'expression de la seconde formule de la moyenne. Nous analysons l'article de Paul Mansion puis nous le rattachons aux travaux ultérieurs des deux mathématiciens Otto Hölder et Ernest William Hobson sur ce résultat mathématique.

1. Introduction

Expliquons tout d'abord ce qu'est la seconde formule de la moyenne. Comme c'est un résultat classique de calcul intégral, il figure dans tout bon traité d'analyse. Nous avons choisi le livre de V.A. Zorich [Zorich V.A., 2004]. L'auteur énonce le second théorème de la moyenne de la façon suivante (page 357) :

Si f *et* g *sont intégrables au sens de Riemann sur* [a,b] *et si* g *est monotone sur* [a, b], *alors il existe* $\xi \in$ [a, b] *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx. \qquad (1)$$

L'égalité ci-dessus est une conséquence du lemme, page 355 du même ouvrage :

Si f *et* g *sont intégrables au sens de Riemann sur* [a,b] *et si* g *est positive et décroissante sur* [a, b]*, alors il existe* $\xi \in$ [a, b] *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx. \qquad (2)$$

Deux fonctions entrent donc en jeu dans ce résultat. L'hypothèse de monotonie sur l'une des fonctions est fondamentale. Par contre, si V.A. Zorich considère des fonctions intégrables au sens de Riemann[1] sur un segment, il existe d'autres versions de la seconde formule de la moyenne correspondant à des hypothèses différentes sur l'intégrabilité (ou la régularité) des deux fonctions.

Les deux écritures ci-dessus, *(1)* et *(2),* cachent un point essentiel qui apparaît dans les démonstrations : la formule de la moyenne et son lemme se conçoivent avant tout comme des inégalités. L'égalité qui en découle résulte d'un argument de continuité et de l'application du théorème des valeurs intermédiaires. Qui a démontré le premier cette seconde formule de la moyenne ? D'après le mathématicien Ernest William Hobson (1856-1933) [Hobson E. W., 1907], le mathématicien français Ossian Bonnet (1819-1892) aurait été le premier mathématicien à avoir énoncé et appliqué le lemme ci-dessus. En 1849, Ossian Bonnet écrit dans [Bonnet O., 1849] :

On connaît le théorème suivant dû à l'illustre Abel et si utile dans la théorie des séries :

$$(1)\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

1. Pour la définition d'une fonction Riemann-intégrable sur un segment, le lecteur pourra consulter aussi [Hairer E., Wanner G., 1996].

représentant n nombres réels quelconques, et

$$(2)\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n,\ldots$$

n *autres nombres positifs et décroissants ; si pour toutes les valeurs entières de* p *depuis 1 jusqu'à* n*, on a*

$$A<a_1+a_2+\cdots+a_p<B$$

on aura aussi pour les mêmes valeurs de p*,*

$$A\varepsilon_1<a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_p<B\varepsilon_1.$$

La démonstration de ce théorème ne reposant nullement sur ce que p *et* n *sont finis, on peut supposer ces nombres infinis, deux termes consécutifs quelconques des suites (1) et (2) ayant alors généralement une différence infiniment petite, on obtient ainsi cet autre théorème très-facile à établir en toute rigueur :*
Théorème I : Si l'intégrale définie

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

dans laquelle $\varphi(x)$ représente une fonction finie quelconque, reste constamment comprise entre A et B quand x varie de a à b l'intégrale

$$\int_a^x f(t)\varphi(t)\,dt$$

dans laquelle f(x) est une fonction constamment positive et décroissante, reste comprise pour les mêmes valeurs de x entre Af(a) et Bf(a).
Ce nouveau théorème, ou plutôt ce cas particulier du théorème d'Abel, a peut-être été remarqué, mais ce que l'on n'a pas suffisamment montré, je le crois du moins, c'est qu'il peut donner la clef d'un grand nombre de difficultés relatives aux intégrales définies dans lesquelles la limite supérieure est infinie.

Figure 2 : Ossian Bonnet (1819-1892) *(source : Mac Tutor)*

Le rappel du résultat du mathématicien norvégien Niels Abel (1802-1829) par Ossian Bonnet est essentiel pour comprendre la seconde formule de la moyenne. Dans sa preuve de *(2),* V.A. Zorich utilise justement le célèbre résultat de Niels Abel qui est une conséquence directe d'un procédé de sommation[2] du même Abel :

Soit (a_n) *et* (b_n) *deux suites de nombres complexes, après avoir posé* $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ *et* $A_0 = 0$ *, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \qquad (3)$$

Ainsi, en supposant tous les nombres ci-dessus réels, on obtient : si les A_k satisfont à $m \leq A_k \leq M$, *m* et *M* deux constantes fixées, et si les b_i sont positifs et décroissants, on a $m\ b_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq M\ b_1$.

Il est tout à fait possible de prouver *(1)* directement sans passer par le lemme *(2).* C'est ce que nous allons voir. On établit aussi un encadrement mais, contrairement à la démonstration de *(2),* il y a une difficulté dans le choix des bornes de l'intervalle.

@@@@@@@@

Le mathématicien gantois Paul Mansion (1844-1919) publie donc en 1885 dans la revue belge *Mathesis* [Mansion P., 1885 – texte *BibNum*] un article intitulé « Sur le second théorème de la moyenne ». Voyons comment Paul Mansion en est venu à rédiger ce texte.

A cette époque, Paul Mansion est en contact avec le mathématicien berlinois Léopold Kronecker. Paul Mansion attire l'attention de Kronecker sur une démonstration du second théorème de la moyenne par le mathématicien allemand Paul du Bois-Reymond (1831-1889)[3]. Léopold Kronecker communique alors à Paul Mansion une preuve directe de la formule de la moyenne, dans sa version (1), dans laquelle il applique la transformation d'Abel à une somme de Riemann[4].

2. Voir l'analyse du texte de 1826 d'Abel par Roger Mansuy, Bibnum, juillet 2011.
3. Pour des biographies complètes des différents mathématiciens nommés dans cet article, nous renvoyons le lecteur au site Mac Tutor (http ://www-history.mcs.st-and.ac.uk/).
4. Voir la figure 4 pour un exemple d'une telle somme. La valeur exacte de l'intégrale est 16,5.

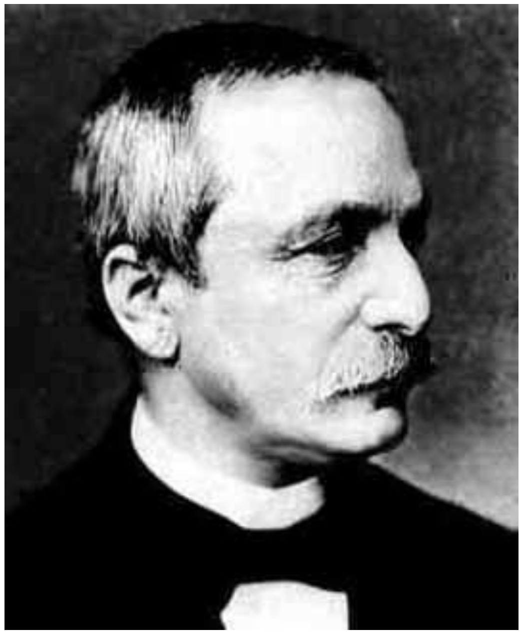
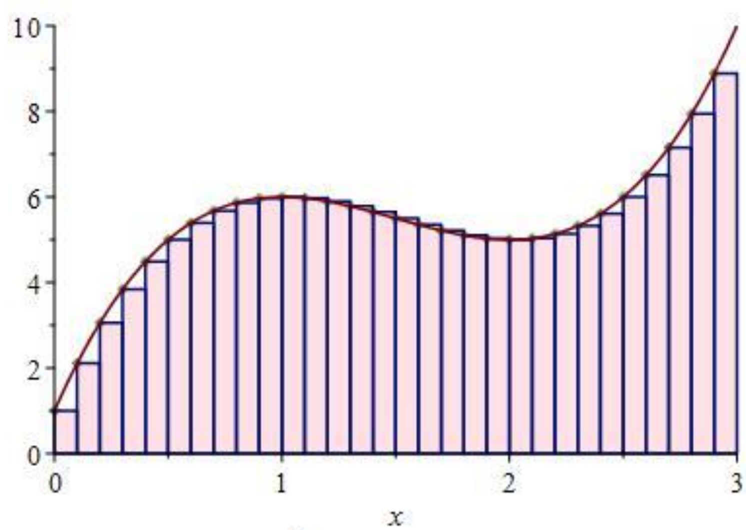


Figure 3 :** **Léopold Kronecker (1823-1891) *(source: MacTutor)*



Une approximation de $\int_0^3 f(x)\,dx$ par une somme gauche de Riemann, où $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ et la partition est uniforme. La valeur approximative de l'intégrale est 16.05000000. Nombre de sous-intervalles utilisés: 30.

Figure 4 :** **Somme gauche de Riemann

Paul Mansion explique tout ceci dans le paragraphe II de l'article. Indiquons que nous avons retrouvé par une autre voie l'existence de ces échanges entre Paul Mansion et Léopold Kronecker. La Bibliothèque Royale de Belgique, à Bruxelles, possède un ensemble important de lettres reçues par Paul Mansion. Trois lettres de Léopold Kronecker se trouvent dans cette correspondance scientifique. Elles sont datées respectivement des 7 décembre 1883, 19 février 1884 et 24 mars 1884. Elles ont pour sujet la seconde formule de la moyenne. La preuve de Kronecker se trouve dans la première lettre. La dernière lettre contient toutes les références données dans l'article de *Mathesis*.

***Figure 5 :* Paul du Bois-Reymond (1831-1889)** *(source : MacTutor)*

Si pour le lecteur, Abel, Kronecker, Bonnet, du Bois-Reymond ne sont pas des inconnus, il n'en va peut-être pas de même pour Paul Mansion. Mettons en lumière ce mathématicien. Nous nous appuyons ici en particulier sur l'éloge de Paul Mansion fait par un de ses anciens élèves et collègues Alphonse Demoulin (1869-1947)[5], en 1927,

5. Alphonse Demoulin étudia et enseigna à l'Université de Gand à partir de 1893 (jusqu'en 1936) [Biographie nationale, 1958]. Il fut aussi l'élève de Gaston Darboux (1842-1917) à Paris en 1892. Demoulin travailla essentiellement dans le domaine de la Géométrie Différentielle et ses travaux furent récompensés par troix prix de l'Académie des Sciences de Paris : le prix du baron de Joest en 1906, le prix Bordin en 1911 (Sujet proposé : « Perfectionner en un point important la théorie des systèmes triples de surfaces orthogonales ») et le prix Poncelet en 1945.

devant la Classe des Sciences de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique[6] [Demoulin A., 1927].

2. Qui était Paul Mansion ?

Paul Mansion est né en 1844 à Marchin-Lez-Huy dans la province de Liège. Il vient donc au monde dans une Belgique dont les frontières ont été fixées en 1839 par le Traité des XXIV articles. La Belgique a alors à sa tête un roi, le premier d'entre eux, Léopold Ier (1790-1885).

C'est à Gand cependant que Paul Mansion va effectuer ses études supérieures : il entre en 1862 à l'École normale des sciences qui dépend de l'Université de Gand et en 1865, il en sort *professeur agrégé de l'enseignement moyen du degré supérieur pour les sciences*. Dès l'automne 1865, il enseigne à l'École préparatoire du Génie civil à Gand. Le 13 août 1867, il devient docteur en sciences physiques et mathématiques. Le jury est constitué de professeurs des universités de Gand et Bruxelles. Deux mathématiciens l'ont influencé à cette époque : Félix Dauge (1829-1889) et Mathias Schaar (1817-1867). Ce dernier enseigne l'arithmétique et, à la suite de son décès, Paul Mansion est nommé à la chaire de Calcul Différentiel et Intégral, et d'Analyse Supérieure de l'Université de Gand le 3 Octobre 1867 à l'âge de 23 ans. Quant à Dauge, c'est son cours de méthodologie des mathématiques qui marque durablement Mansion.

@@@@@@@@

Paul Mansion publie son premier article[7] en 1868. Il s'agit de probabilités : « Sur le problème des parties » publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique*. En 1870, il soutient une thèse intitulée *Théorie de la multiplication des fonctions elliptiques* à l'Université de Liège. Il passe ensuite un semestre à l'Université de Göttingen au contact d'Alfred Clebsch (1833-1872) et d'Ernst Schering (1833-1897). En 1873, il remporte un prix de l'Académie des Sciences de Belgique dont le sujet est : *Résumer et simplifier la théorie des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres*. De 1880 à 1886, il se consacre à des questions de quadratures approchées.

6. Cette académie est divisée en quatre classes.
7. Il publiera plus de trois cent articles.

En 1874, il fonde avec Eugène Catalan (1814-1894), alors professeur à l'Université de Liège, le journal *Nouvelle correspondance mathématique*. Demoulin [Demoulin A., 1927] précise :

> […] *ce journal ne devait s'occuper que des parties de la science mathématique enseignées dans les classes supérieures des établissements d'instruction moyenne et dans les Écoles d'ingénieurs. Mais Catalan, qui le dirigea seul, de 1876 à 1880, en éleva peu à peu le niveau, de sorte qu'il répondit de moins en moins aux besoins de l'enseignement en Belgique.*

Ce journal est rapidement remplacé par une nouvelle revue, en 1881, *Mathesis*, créée par Mansion et Joseph Neuberg (1840-1926). Concernant Mathesis, Demoulin [Demoulin A., 1927] indique :

> *Son programme était le même que le programme primitif de la* Nouvelle Correspondance*. Mansion et Neuberg eurent la sagesse de maintenir* Mathesis *au niveau qu'ils lui avaient assigné et leur journal put vivre et prospérer. Ils l'ont publié sans interruption jusqu'à la fin de 1915, soit pendant trente-cinq années. Seules les difficultés nées de la guerre les ont forcés à en suspendre la publication. Mansion ne devait pas la reprendre.* Mathesis *n'a recommencé à paraître qu'en 1922, sous la direction de Neuberg et de M. Mineur.*

La revue cessera de paraître en 1962.

En 1892, Paul Mansion succède à Emmanuel-Joseph Boudin (1820-1893) à la chaire de calcul des Probabilités de l'Université de Gand. Quelques années auparavant, il avait pris la charge du cours d'Histoire des sciences mathématiques à l'École normale des sciences, cours qu'il continuera d'assurer après la disparition de cette école, dans le cadre du doctorat en sciences physiques et mathématiques. Deux anciens élèves de Paul Mansion vont devenir des historiens des sciences célèbres, le prêtre Henri Bosmans (1852-1928) et Georges Sarton (1884-1956). Ajoutons à cela que l'enseignement d'histoire des sciences de Bosmans marquera Georges Lemaître (1894-1966), le père de la théorie du Big Bang. Georges Lemaître a eu en effet Henri Bosmans comme professeur au Collège jésuite Saint-Michel de Bruxelles vers 1910 ([Lambert D., 2015], p. 43-44). Un autre élève de Mansion joue un rôle important dans la formation mathématique de Lemaître, Ernest Pasquier (1849-1926), professeur à l'Université Catholique de Louvain.

En 1882, Paul Mansion est élu membre correspondant de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique ; il en devient membre titulaire en 1887. Il préside durant l'année 1889-1890 la Société Scientifique de Bruxelles dont il est membre depuis sa création en 1875[8].

Deux de ses enfants ont eu des carrières universitaires : Joseph (1877-1937), linguiste, professeur à l'Université de Liège et Augustin (1882-1966) théologien, professeur de philosophie à l'Université Catholique de Louvain. Joseph Mansion est aussi le grand-père de la philosophe Suzanne Mansion (1916-1981), professeur de philosophie à l'Université Catholique de Louvain.

3. Une preuve par Du Bois-Reymond de la seconde formule de la moyenne

Paul Mansion expose une preuve de Du Bois-Reymond dans le « cas de fonctions élémentaires » : la fonction F est supposée de classe C^1, c'est-à-dire dérivable sur un intervalle avec une fonction dérivée continue sur cet intervalle. La fonction φ est continue. Ainsi, en adoptant les notations de Mansion qui ne met pas de parenthèses aux variables, on a :

$$Fx - Fx_0 = \int_{x_0}^{x} F'y dy \qquad (4)$$

Mansion peut écrire :

$$V = \int_{x_0}^{X} (Fx - Fx_0)\varphi x \, dx = \int_{x_0}^{X} \varphi x \, dx \int_{x_0}^{x} F'y \, dy$$

V étant le volume compris entre la surface qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires, $z=\varphi xF'y$, le plan des xy, et les trois plans représentés par $x=x_0$ $y=x_0$, $y=x$.

Notons une erreur d'impression, il s'agit du plan x=X et non $x=x_0$. On intègre donc la fonction de deux variables $\varphi xF'y$ sur le rectangle :

$$D=\{(x,y)/x_0 \le x \le X, x_0 \le y \le x\}.$$

Ce rectangle peut aussi être paramétré de la façon suivante :

8. Un des créateurs de cette société savante est le père jésuite, et scientifique, belge Ignace Carbonnelle (1829-1889). En 1875, Ignace Carbonnelle enseigne au Collège Saint Michel de Bruxelles.

$$D=\{(x,y)/\ y\leq x\leq X\ ,x_0\leq y\leq X\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini[9] à *V,* Mansion obtient :

$$\mathrm{V}=\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'y\, dy \int_y^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx.$$

La fonction F étant supposée « une fonction non croissante », F' est négative, ce qui permet d'utiliser la première formule de la moyenne que nous rappelons (voir par exemple [Zorich V.A., 2004], p. 352) :

> *Si* f *est continue sur* [a,b] *et si* g*, intégrable au sens de Riemann, est positive (ou négative) sur* [a, b], *alors il existe* $\xi\in$ [a, b] *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

On peut donc « sortir » la fonction $\int_y^X \varphi x\, dx$ du signe intégral, ce qui permet à Paul Mansion de conclure :

> *On a donc enfin*

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} (\mathrm{F}x-\mathrm{F}x_0)\,\varphi x\, dx=(\mathrm{FX}-\mathrm{F}x_0)\int_{x_\mu}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx$$

Paul Mansion fait ensuite deux remarques sur le lien entre les formules *(1)* et *(2).* La seconde remarque ne soulève pas de difficulté : par exemple si *g* est décroissante, on obtient la formule *(1)* en appliquant *(2)* à la fonction positive et décroissante $x\mapsto g(x)-g(b)$. Dans la première remarque, Paul Mansion veut obtenir *(2)* partant de *(1).* Si l'auteur a raison de mettre en évidence que la formule *(2)* n'est pas une simple conséquence de *(1), s*a suggestion n'est cependant pas très convaincante dans la mesure où il ne fait pas d'hypothèse sur *F* et φ. Sur cette difficulté, Hobson [Hobson E. W., 1907] renvoie d'ailleurs le lecteur à un article du mathématicien allemand Alfred Pringsheim (1850-1941) [Pringsheim A., 1900].

9. Voir par exemple [Hairer E., Wanner G., 1996] page 336-337.

4. LA DÉMONSTRATION DONNÉE PAR LÉOPOLD KRONECKER

Paul Mansion écrit au sujet de la preuve que Léopold Kronecker lui a envoyée :

> [...] *l'éminent professeur attira notre attention sur la suivante, où il utilise, d'une manière complète, la célèbre méthode de transformation des séries, due à Abel, en l'appliquant aux intégrales.*

Kronecker considère en effet comme point de départ de la démonstration une somme de Riemann associée à la fonction $Fx\varphi x$ sur l'intervalle $[x_0, X]$:

Par définition

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = \lim_{n=\infty} S_n$$

si

$$S_n = (x_2 - x_0)Fx_1\varphi x_1 + (x_4 - x_2)Fx_3\varphi x_3 + \cdots + (X - x_{2n-2})Fx_{2n-1}\varphi x_{2n-1}$$

On applique alors la transformation d'Abel *(3)*, les $(x_{2k} - x_{2k-2})\varphi x_{2k-1}$ jouant le rôle des a_i et les Fx_{2k-1} ceux des b_i, F étant supposée décroissante. Les s_k de l'article sont les A_k de (3) :

$$s_k = (x_2 - x_0)\varphi x_1 + (x_4 - x_2)\varphi x_3 + \cdots + (x_{2k} - x_{2k-2})\varphi x_{2k-1}$$

On notera attentivement que si s_n est une somme de Riemann associée à la fonction φ sur l'intervalle *[x₀, X]*, donc que $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_{x_0}^{X} \varphi x dx$, ce n'est pas le cas des s_k pour $k < n$. Là vont résider les difficultés que nous avons déjà évoquées pour trouver un bon encadrement qui puisse conduire à l'égalité finale, c'est-à-dire à la seconde formule de la moyenne. Paul Mansion introduit deux nombres *m* et *M* :

> *Soient m, M deux quantités, l'une plus petite, l'autre plus grande, entre lesquelles les sommes* $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ *sont toujours comprises.*

Les inégalités *(5)* page 100 de l'article de Paul Mansion découlent alors, après passage à la limite, de celles que nous avons mentionnées plus haut après l'énoncé de la transformation d'Abel *(3)*. Ainsi[10] :

---

10. Il serait plus correct de mettre des inégalités au sens large.

$$m\,(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX}) + \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx < \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx$$

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx < \mathrm{M}\,(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX}) + \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx.$$

Remarquons que Paul Mansion écrit *F(X)* alors qu'il faudrait prendre la limite à gauche *F(X–0).*

Pour arriver finalement à la seconde formule de la moyenne, Paul Mansion fait une hypothèse très forte :

> *Supposons maintenant de plus, que m_0, M_0 soient les valeurs minima et maxima, et réellement atteints par l'intégrale $\int_{x0}^{x} \varphi(x)\,d\,x$ lorsque x varie de x_0 à X* […]

En utilisant une écriture plus moderne,

$$m_0 = \inf_{x\in[x_0,X]} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx,\ M_0 = \sup_{x\in[x_0,X]} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx$$

alors

$$m_0(F(x_0) - F(X)) \le \int_{x_0}^{X} F(x)\varphi(x)dx - F(X)\int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx \le M_0(F(x_0) - F(X))$$

puis

$$m_0 \le \frac{\int_{x_0}^{X} F(x)\varphi(x)dx - F(X)\int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx}{F(x_0) - F(X)} \le M_0$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx$ pour obtenir l'existence de x_μ et les conclusions se trouvant en fin de p. 100-début de p. 101. Mais comme le souligne Paul Mansion,

> *L'analyse précédente du numéro 1, donne le théorème de la moyenne sous forme d'inégalités. Pour en tirer le théorème sous forme d'une égalité, il faut y introduire, comme on l'a vu plus haut au numéro 2, une certaine valeur moyenne x_μ, dont la définition exige plus qu'il est nécessaire pour établir ces inégalités.*

La preuve de Kronecker n'est donc pas tout à fait aboutie. On doit une preuve complète à Otto Ludwig Hölder (1859-1937) qui fut l'élève à la fois de Kronecker et de Du Bois-Reymond[11]. Hölder expose sa démonstration dans [Hölder L., 1894], pages 519-522[12].

Figure 6 : Otto Ludwig Hölder (1859-1937) *(source: MacTutor)*

Hobson reprend la preuve de Hölder dans son livre [Hobson E. W., 1907, p. 360-362]. La seconde formule de la moyenne donnée par Hölder fait intervenir la limite à droite de *f* en *a* et la limite à gauche en *b*, *f* étant décroissante :

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx. \qquad (5)$$

Cette démonstration de Hölder répond aux remarques de Paul Mansion en surmontant la difficulté liée au choix des bornes m_0 et M_0 introduites plus haut. Hobson s'appuie sur cette preuve pour donner une version encore plus générale du second théorème de la moyenne.

11. Voir la biographie de Hölder dans Mac Tutor.
12. C'est la recension d'un ouvrage d'Otto Stolz (1842-1905).

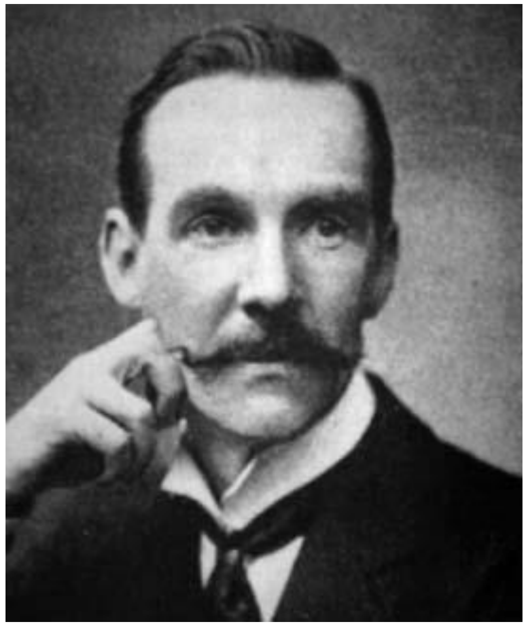


***Figure 7:* Ernest William Hobson (1856-1933)** *(source : MacTutor)*

5. Conclusion

Dans la revue *Mathesis* dont il est l'un des directeurs, Paul Mansion met en lumière, à destination d'un assez large public, un résultat mathématique qui en 1885 fait encore l'objet de recherches. La preuve que lui a communiquée Léopold Kronecker n'est pas totalement achevée. Otto Hölder, élève de Léopold Kronecker et de Paul du Bois-Reymond, termine en 1894[13] la démonstration avant qu'Ernest William Hobson ne donne en 1907 une version encore plus générale du second théorème de la moyenne toujours dans le cas de fonctions intégrables au sens de Riemann.

Près de quarante années après la publication de l'article de Paul Mansion, en 1921, paraît une seconde édition du livre de Hobson. La théorie de l'intégrale de Lebesgue[14] s'est alors largement diffusée. Hobson quitte donc le cadre des fonctions Riemann-intégrables pour démontrer une seconde formule de la moyenne valable pour des fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

■

(février 2017)

13. Hobson mentionne aussi une démonstration d'Eugen Netto (1848-1919) datant de 1895.
14. Son inventeur est le mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941).

Références

[Liber Memorialis, 1913] *Notice biographique de Paul Mansion,* in Liber Memorialis, Université de Gand, pages 196-216, 1913.

[Biographie nationale, 1958] Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, tome 30, Bruxelles, 1958.

[Bois-Reymond (du) P., 1868] *Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das Fouriersche Doppelintegral gehört.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik - 69, 44 Page(s) (65 - 108).

[Bonnet O., 1849] *Remarques sur quelques intégrales définies*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, tome XIV, 1849, p. 249-256.

[Davis P.J., 1975] *Interpolation and approximation,* Dover, New York, 1975.

[Demoulin A., 1927] *La vie et l'oeuvre de Paul Mansion, éloge fait le 16 Décembre 1927 devant la Classe de Sciences*, Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 1929, p. 79.

[Hairer E., Wanner G., 1996] *Analysis by its history*, Springer Verlag, 1996.

[Hobson E. W., 1907] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Cambridge University Press, 1907.

[Hölder L., 1894] *recension du livre de Otto Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1893* , Göttingische gelehrte Anzeigen, 1894.

[Jordan C.,] *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, tome 2, Calcul Intégral*, Gauthier-Villars et fils, 1894.

[Lambert D., 2015] *The atom of the universe, The life ans work of Georges Lemaître*, Copernicus center press, 2015.

[Mansion P., 1885] *Sur le second théorème de la moyenne*, Mathesis, Tome 5, 1885, p. 97-102.

[Pringsheim A., 1900] *Ueber den sogenannten zweiten Mittelwertsatz für endliche Summen und Integrale*, Münch. Ber. 30, 209-233 (1900).

[Spivak M., 1994] *Calculus, third edition*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1994.

[Zorich V.A., 2004] *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.