ESSAI

SUR UNE MANIÈRE

DE REPRÉSENTER

LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

A PARIS,

Mr Argand rue de Tabletterie 7

Chez ~~Madame Veuve BLANC, Horloger, rue S. Honoré, N° 160, vis à vis la rue du Coq.~~

M. DCCC. VI.

ESSAI

SUR

UNE MANIÈRE DE REPRÉSENTER

LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

S. F. T. L. C. M.

1. Soit a une grandeur prise à volonté. Si à cette grandeur on en ajoute une seconde qui lui soit égale, pour ne former qu'un seul tout, on aura une nouvelle grandeur, qui sera exprimée par $2a$. Faisant sur cette dernière grandeur une pareille opération, le résultat sera exprimé par $3a$, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de grandeurs

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a, \ldots,$$

dont chaque terme naît du précédent, par une opération qui est la même pour tous les termes, et qui peut être répétée indéfiniment.

Considérons cette même suite à rebours, savoir :

$$\ldots,\ 4a,\ 3a,\ 2a,\ a.$$

On peut encore concevoir, dans cette nouvelle suite, chaque terme comme déduit du précédent, par une opération inverse de celle qui sert à la formation de la première suite; mais il existe une différence notable entre les deux suites : la première peut être poussée aussi loin qu'on voudra; il n'en est pas de même de la seconde. Après le terme a, on trouvera le terme o; mais, pour aller plus loin, il faut que la nature de la grandeur a soit telle, qu'on puisse opérer à l'égard de o comme on l'a fait à l'égard des termes ..., $4a$, $3a$, $2a$, a. Or c'est ce qui n'est pas toujours possible.

Si a, par exemple, désigne un poids matériel, comme le *gramme*, la suite des quantités ..., $4a$, $3a$, $2a$, a, o ne peut être continuée au delà de o; car on ôte bien 1 gramme de 3, de 2 ou de 1 gramme, mais on ne saurait l'ôter de o. Ainsi les termes qui devraient suivre o ne peuvent avoir d'existence que dans l'imagination; ils peuvent, par cela même, être appelés *imaginaires*.

Mais, au lieu d'une suite de poids matériels, considérons les divers degrés de pesanteur qui agissent sur le bassin A d'une balance qui contient des poids dans ses deux bassins, et supposons, pour donner plus d'appui à nos idées, que les mouvements des bras de cette balance soient proportionnels aux poids ajoutés ou retranchés, effet qui aurait lieu, par exemple, au moyen d'un ressort adapté à l'axe. Si l'addition du poids n dans le bassin A fait varier de la quantité n' l'extrémité du bras A, l'addition des poids $2n$, $3n$, $4n$,... occasionnera, sur cette même extrémité, des variations $2n'$, $3n'$, $4n'$,..., et ces variations pourront être prises pour mesure de la pesanteur agissant sur le bassin A : cette pesanteur est o pour le cas d'égalité entre les deux bassins. On pourra, en ajoutant dans le bassin A des poids n, $2n$, $3n$,..., obtenir les pesanteurs n', $2n'$, $3n'$,..., ou, en partant de la pesanteur $3n'$, obtenir, en retranchant des poids, les pesanteurs $2n'$, n', o. Mais ces divers degrés peuvent être produits non-seulement en enlevant des poids au bassin A, mais aussi en en ajoutant au bassin B. Or l'addition de poids sur le bassin B peut être répétée indéfiniment; ainsi, en la continuant, on formera de nouveaux degrés de pesanteur exprimés par $-n'$, $-2n'$, $-3n'$,..., et ces termes, appelés *négatifs*, exprimeront des quantités aussi réelles que les termes positifs. On voit donc aussi que, si deux termes, de signes différents, ont le même nombre pour coefficient, comme $3n'$, $-3n'$, ils exprimeront deux états du levier tels, que l'extrémité qui marque les degrés de pesanteur sera, dans l'un et dans l'autre, également éloignée du point o. On peut considérer cet éloignement en faisant abstraction du *sens* dans lequel il a lieu, et lui donner alors le nom d'*absolu*.

Considérons encore dans une autre espèce de grandeurs la génération des quantités négatives. Si, pour compter une somme d'argent, on adopte pour unité le *franc* matériel, on pourra opérer des diminutions successives sur cette somme, et la réduire à zéro par la soustraction d'un certain nombre de francs. Arrivé à ce terme, on voit que la soustraction cesse d'être praticable, et que, par conséquent, — 1 franc, — 2 francs,... sont des quantités imaginaires.

Prenons maintenant le franc de compte pour unité, à dessein d'évaluer la fortune d'un individu, laquelle se compose de valeurs actives et de valeurs passives. Ce que nous appelons *diminution* dans cette fortune pourra avoir lieu soit par le retranchement d'un nombre de francs à l'actif, soit par l'addition d'un nombre de francs au passif, et, en poussant à un certain terme cette diminution par l'un de ces deux moyens, on parviendra à une fortune négative, telle que — 100 francs, — 200 francs,.... Ces expressions signifieront que le nombre de francs des valeurs passives, considéré abstraitement, est plus grand de 100, de 200,... que celui des valeurs actives. Ainsi — 100 francs, — 200 francs,..., qui n'exprimaient dans le premier cas que des quantités imaginaires, représentent ici des quantités aussi réelles que celles que désignent les expressions positives.

2. Ces notions sont très-élémentaires; néanmoins il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de très-grands progrès avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer.

Au reste, on ne s'est nullement proposé de donner ici des principes plus rigoureux ou plus évidents que ceux qu'on trouve dans les Ouvrages qui traitent ce sujet; on a eu simplement pour but de faire deux remarques sur les quantités négatives. La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire (*); la se-

(*) Le sens dans lequel on prend ces mots est suffisamment conde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1° l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées *absolument;* 2° l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$
$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes

---

déterminé par ce qui précède : l'extension qu'on donne ici à leur signification ordinaire paraît permise, et d'ailleurs n'est pas absolument nouvelle. Ce qu'on appelle, en Optique, foyer imaginaire, par opposition au foyer réel, est le point de rencontre de rayons qui n'ont pas une existence physique, et qui peuvent, en quelque sorte, être considérés comme des rayons négatifs.

différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : +x :: +x : -1.$$

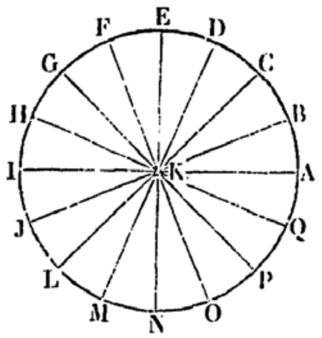
On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de o la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (*fig.* 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condi-

tion à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.



comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Par une marche analogue, on pourra insérer de nouvelles moyennes proportionnelles entre les quantités dont il vient d'être question. En effet, pour construire la moyenne proportionnelle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KE}$, il faudra tirer la ligne CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales, et la moyenne cherchée sera $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. La ligne GKP donnera également les moyennes entre $\overline{KE}$ et $\overline{KI}$ ou entre

$\overline{KA}$ et $\overline{KN}$. On obtiendra de même les quantités $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$ pour moyennes entre $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ et $\overline{KE}$,..., et ainsi de suite. On pourra pareillement insérer un plus grand nombre de moyennes proportionnelles entre deux quantités données, et le nombre des constructions qui pourront résoudre la question sera égal au nombre des rapports que présente la progression cherchée. S'il s'agit, par exemple, de construire deux moyennes, $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB},$$

il faut qu'on ait

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB},$$

le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases AK, PK, QK. Or on peut y

Fig. 2.

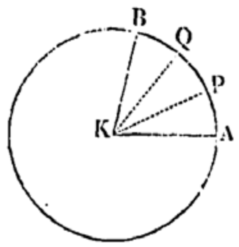
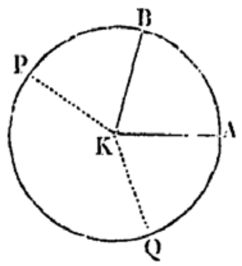
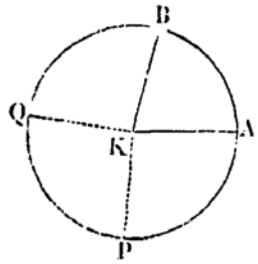


Fig. 2 *bis*.



parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales : 1° l'angle AKB ; 2° l'angle AKB, plus une circonférence ; 3° l'angle AKB, plus deux circonférences,

Fig. 2 *ter*.



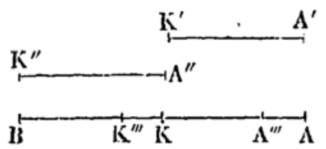
ce qui donnera les trois constructions représentées par les *fig.* 2, 2 *bis*, 2 *ter* (*).

5. Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$,..., il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique K; mais que

(*) Le principe sur lequel se fondent ces constructions, énoncé d'une manière générale, consiste en ce que le rapport de deux rayons $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, faisant entre eux un angle QKP, dépend de cet angle, lorsque l'on considère ces rayons comme tirés dans une certaine direction, et que ce rapport est le même que celui de deux autres rayons $\overline{KR}$, $\overline{KS}$, faisant entre eux le même angle; mais, quoique ce principe soit, en quelque manière, une extension de celui sur lequel on établit le rapport géométrique entre une ligne positive et une ligne négative, on ne le présente ici que comme une hypothèse, dont il restera à établir la légitimité, et dont, jusque-là, les conséquences devront être confirmées par une autre voie.

ces relations ont également lieu, si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{KA}$, désigne en général une grandeur égale à KA, et prise dans la même direction, comme $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, $\overline{K'''A'''}$, $\overline{BK}$,... (*fig.* 3).

Fig. 3.



En effet, en suivant, à l'égard de cette nouvelle espèce de grandeurs, les raisonnements qui ont été faits plus haut, on verra que, si $\overline{KA}$, $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$,... sont des unités positives, $\overline{AK}$, $\overline{A'K'}$, $\overline{A''K''}$,... seront des unités négatives; que la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1 pourra être exprimée par une ligne quelconque, égale aux précédentes, perpendiculaire à leur direction, et qu'on pourra prendre à volonté dans l'un de ses deux sens, et ainsi de suite. On peut, pour aider les idées à se fixer, considérer un cas particulier, comme, par exemple, si l'on désigne par $\overline{KA}$ une force déterminée prise pour unité, et dont l'action s'exerce sur tous les points possibles, parallèlement à KA et dans le sens de K à A, cette unité pourra être exprimée par une ligne parallèle à KA, prise à partir d'un point quelconque. L'unité négative sera une force égale en action, et dont l'effet a lieu parallèlement à la même ligne, mais dans le sens de A à K, et pourra pareillement être exprimée par une ligne partant d'un point quelconque, laquelle sera prise en sens contraire de la précédente. Or il suffit que les qualités de positives et de négatives, que nous attribuons aux grandeurs d'une certaine espèce, dépendent de directions opposées entre lesquelles il en existe une moyenne, pour qu'on puisse y appliquer les idées développées ci-devant à l'égard des rayons partant d'un centre unique, et concevoir, entre toutes les lignes qui représenteront une telle espèce de grandeurs, les mêmes relations qu'ont offertes ces rayons.

6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$,..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des lignes *absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction (*).

(*) L'expression de *lignes en direction* n'est qu'une abréviation de cette phrase : *lignes considérées comme appartenant à une certaine direction*. Cette remarque indique qu'on ne prétend point fonder de nouvelles dénominations, mais qu'on emploie cette façon de s'exprimer soit pour éviter la confusion, soit pour abréger le discours.

7. En rapportant aux dénominations d'usage les diverses espèces de lignes en direction qui s'engendrent d'une unité primitive $\overline{KA}$, on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Mais ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive; elles en dérivent par la combinaison de l'idée de la direction avec l'idée de la grandeur, et elles sont, à cet égard, ce qu'est la ligne négative, qui n'est nullement regardée comme imaginaire. Les noms de *réel* et d'*imaginaire* ne s'accordent donc pas avec les notions qui viennent d'être exposées. Il est superflu d'observer que ceux d'*impossible* et d'*absurde*, qu'on rencontre quelquefois, y sont encore plus contraires. On peut d'ailleurs s'étonner de voir ces termes employés dans les sciences exactes autrement que pour qualifier ce qui est contraire à la vérité (*).

Une quantité absurde serait celle dont l'existence en-

(*) Il y a eu une époque où, conduits par la force de la vérité à admettre, dans les quantités abstraites, des valeurs négatives, les géomètres, ayant apparemment quelque difficulté à imaginer que *moins que rien* pût être quelque chose, donnèrent le nom de *fausses* aux valeurs dont il s'agit. Ce mot cessa d'être employé dans le sens qu'on y avait attaché, lorsqu'on eut rectifié les premières idées qui avaient donné lieu à cette dénomination vicieuse.

traînerait la vérité d'une proposition fausse : telle serait, par exemple, la quantité x qui satisferait à la fois aux deux équations $x = 2$, $x = 3$, d'où s'ensuivrait $2 = 3$. En admettant une pareille quantité dans le calcul, on arriverait à des conséquences aussi contradictoires que l'équation $2 = 3$; mais les résultats obtenus par l'emploi des quantités dites *imaginaires* sont en tout conformes à ceux qu'on déduit des raisonnements dans lesquels on ne fait usage que de quantités réelles. On pouvait donc pressentir un vice dans les dénominations qui plaçaient dans la même classe les quantités vraiment absurdes et les racines d'ordre pair des quantités négatives, et c'est le sentiment secret de cette inconvenance qui a été le premier germe des idées qui reçoivent leur développement dans cet Essai (*). Nous sommes donc conduits à employer d'autres dénominations.

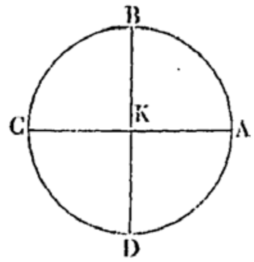
Observons que, quoiqu'il existe une infinité d'espèces différentes de lignes dérivées de l'unité primitive, on ramène, dans la pratique du calcul, et par les moyens dont nous nous occuperons bientôt, toutes les lignes en direction aux espèces $\overline{KA}$, $\overline{KC}$, $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KA}$ est l'unité primitive ou positive; $\overline{KC}$ est l'unité négative; $\overline{KB}$ et $\overline{KD}$ sont les unités moyennes (*fig.* 4).

De plus il convient d'embrasser sous un même nom les espèces opposées, positives et négatives réciproques. La réunion de deux espèces ainsi relatives formera un

(*) Il est presque superflu d'observer qu'on ne parle ici que de la confusion qui existe dans les mots, et qu'on ne dit point que cette confusion soit aussi dans les idées.

ordre. Nous appellerons *ordre prime* celui que composent l'espèce primitive $\overline{KA}$ et sa négative $\overline{KC}$, et *ordre médiane* celui qui contient les espèces moyennes $\overline{KB}$ et $\overline{KD}$.

Fig. 4.



Nous dirons aussi *quantité prime, quantité médiane*, pour *quantité de l'ordre prime, de l'ordre médiane*. Ces dénominations sont tirées de la génération de ces quantités et de la manière dont nous en concevons l'existence. On pourra donner le nom général d'*intermédianes* à toutes les autres, qu'il n'est pas nécessaire de désigner particulièrement (*).

(*) Il a été remarqué plus haut que les rapports qu'on dit exister entre les lignes, en vertu des directions auxquelles elles appartiennent, ne peuvent être regardés, quant à présent, que comme hypothétiques. On est donc fort éloigné de prétendre que les dénominations proposées dans cet article soient propres à remplacer celles que l'usage a consacrées; si on les emploie ici, c'est qu'en général il convient d'éviter de se servir de termes dont la signification propre soit contradictoire avec les idées qu'on veut exprimer, même lorsqu'il s'agit de supposition.

8. On pourrait aussi, d'après les idées qui précèdent, modifier l'expression des quantités dites *imaginaires*, de manière à donner plus de simplicité à cette partie de la notation.

Lorsqu'on écrit $+ a\sqrt{-1}$ ou $- a\sqrt{-1}$, on indique explicitement la génération de la quantité $\sqrt{-1}$, ce qui peut être bon dans certains cas; mais, pour l'ordinaire, on fait abstraction de cette génération, et $\sqrt{-1}$ n'est autre chose que l'espèce particulière d'unité à laquelle s'applique le nombre a. Il n'est donc pas essentiellement nécessaire de rappeler aux yeux cette génération. D'ailleurs l'expression $a\sqrt{-1}$ présente $\sqrt{-1}$ comme un facteur qui multiplie a; mais, au fond, $\sqrt{-1}$, dans $a\sqrt{-1}$, n'est pas plus un facteur que $+1$ dans $+a$ ou -1 dans $-a$. Or on n'écrit pas $+1.a$, $-1.a$, mais simplement $+a$, $-a$, et le signe qui précède a indique lui-même quelle espèce d'unité exprime ce nombre. On peut donc employer un moyen semblable relativement aux quantités imaginaires, en écrivant, par exemple, $\sim a$ et $\not\sim a$, au lieu de $+ a\sqrt{-1}$, $- a\sqrt{-1}$, les signes $\sim$ et $\not\sim$ étant positifs et négatifs réciproques.

Pour la multiplication de ces signes, on observera que, multipliés par eux-mêmes, ils donnent $-$, et que, par conséquent, multipliés l'un par l'autre, ils donnent $+$. On peut, d'ailleurs, établir une règle unique pour tous les signes, qui s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Qu'on affecte la valeur 2 à chacun des traits droits, soit perpendiculaires, soit horizontaux, qui entrent dans les signes à multiplier, et la valeur 1 à chacun des traits courbes : on aura, pour les quatre signes, les valeurs suivantes :

$$\sim\; = 1,$$
$$-\; = 2,$$
$$\dotplus\; = 3,$$
$$+\; = 4.$$

Cela posé, on prendra la somme de la valeur de tous les facteurs, et l'on en retranchera autant de fois 4 qu'il sera nécessaire pour que le reste soit un des nombres 1, 2, 3, 4; ce reste sera la valeur du signe du produit; et pareillement, pour la division, on retranchera la somme des traits du diviseur de celle des traits du dividende, à laquelle on aura ajouté, s'il le faut, un multiple de 4, et le reste indiquera le signe du quotient. Il est à remarquer que ces opérations sont des multiplications et divisions par logarithmes; cette analogie se mettra dans un plus grand jour.

Ces nouveaux signes abrégeraient la notation (*) et rendraient peut-être plus commode le calcul des quantités imaginaires, dans lequel il est quelquefois facile de commettre des erreurs relativement aux signes (**). On en

(*) La quantité $m + n\sqrt{-1}$ s'exprimant par $m \sim n$, ou par $m \dotplus n$, l'un des signes $\sim$ ou $\dotplus$ tiendrait lieu des quatre signes $+$, $\sqrt{}$, $-$, 1.

(**) Qu'il s'agisse, par exemple, de multiplier $-m\sqrt{-c}$ par $+n\sqrt{-cd}$. Le produit des deux coefficients est $-mn$; celui des deux radicaux est $-c\sqrt{d}$; enfin le produit final est $+mnc\sqrt{d}$. Par les nouveaux signes, les deux quantités à multiplier s'exprimeraient par $\sim m\sqrt{c}$, $\dotplus n\sqrt{cd}$, ou par $\dotplus m\sqrt{c}$, $\sim n\sqrt{cd}$, et, au moyen fera usage dans ce qui va suivre, sans prétendre pour cela qu'ils méritent d'être adoptés. On ne se dissimule point qu'il y a un inconvénient inhérent à toutes les innovations, même à celles qui sont fondées en raison ; mais on ne perfectionnerait rien, si on les rejetait par cela seul qu'elles blessent les habitudes, et il est au moins permis d'essayer.

9. Nous allons maintenant examiner les différentes manières dont les lignes dirigées se combinent entre elles par addition et multiplication, et déterminer les constructions qui en résultent.

Supposons d'abord qu'on ait à ajouter à la ligne prime positive $\overline{KP}$ (*fig.* 5) la ligne également prime positive $\overline{KQ}$;

Fig. 5.

la construction ne différera point de celle qui serait employée pour trouver la somme des lignes absolues KP, KQ; elle consiste à prendre sur le prolongement de KP la longueur $PR = KQ$, et la somme cherchée sera KR. On aura donc

$$\overline{KP} + \overline{KQ} = \overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}.$$

---

de la règle des lignes, on obtiendrait immédiatement $+ mne\sqrt{d}$. Cet avantage, si toutefois c'en est un, serait nul pour un calculateur exercé, qui lit un produit à la simple inspection des facteurs ; mais tout le monde n'a pas cette faculté.

Pour ajouter à une ligne prime négative $\overline{PK}$ une autre ligne négative $\overline{QK}$, la construction se fera comme ci-dessus, mais en sens inverse, et on aura

$$\overline{PK} + \overline{QK} = \overline{PK} + \overline{RP} = \overline{RK}.$$

En général, s'il s'agit d'ajouter deux lignes de la même espèce $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, on prendra, dans la direction qui appartient à cette espèce, $PQ = AB$, $QR = AC$, et on aura

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{PR}.$$

S'il s'agit d'ajouter à la ligne positive $\overline{KP}$ la ligne négative QK, on prendra, à partir du point P et dans le sens négatif, $PS = QK$, et l'on aura

$$\overline{KP} + \overline{QK} = \overline{KS} = \overline{QP}.$$

Il en serait de même pour un ordre quelconque.

Or le principe de ces constructions est de regarder le point d'arrivée P de la ligne $\overline{KP}$ comme le point de départ de la ligne à ajouter, et de prendre respectivement, pour points de départ et d'arrivée de la somme, le point de départ de $\overline{KP}$ et le point d'arrivée de la ligne à ajouter. En appliquant ce même principe aux lignes des autres ordres, on conclura que, les points K, P, R étant quelconques, on a toujours

$$\overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR};$$

et, comme chacune des lignes $\overline{KP}$, $\overline{PR}$ peut également être la somme de deux lignes, comme $\overline{KM} + \overline{MP}$, $\overline{PN} + \overline{NR}$, les points M, N étant à volonté, on tirera de là cette conclusion générale, que, A, B; M, N, O,..., R, S, T étant des points quelconques, on a

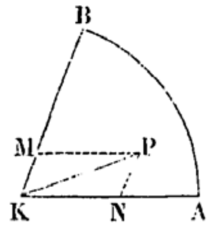
$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NO} + \overline{O\ldots} + \overline{\ldots\ldots} + \overline{\ldots R} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TB}.$$

Les points A, B, M,... peuvent coïncider, ou être tellement placés que les lignes $\overline{AM}$, $\overline{MN}$,... passent plusieurs fois par la même trace, se croisent entre elles, etc. Toutes ces circonstances sont indifférentes (*).

10. Toute ligne en direction peut ainsi être décomposée d'une infinité de manières.

Veut-on, par exemple, décomposer la ligne $\overline{KP}$ (*fig.* 6)

Fig. 6.



en deux parties, l'une de l'ordre $\overline{KA}$, l'autre de l'ordre $\overline{KB}$: on tirera, sur KA, PN parallèle à BK, et on

(*) Cette règle est conclue par voie d'induction, et il faut lui appliquer ce qui a été dit, n° 4, note (*), relativement aux rapports géométriques des lignes dirigées.

aura

$$\overline{KP} = \overline{KN} + \overline{NP}.$$

On aurait pu également tirer PM parallèle à KA, et on aurait eu

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP};$$

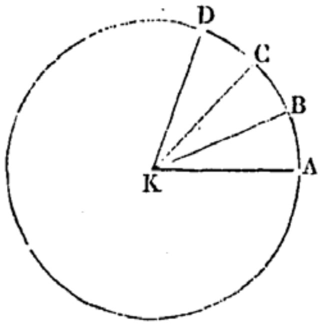
mais ces deux expressions sont identiques, car $\overline{KM} = \overline{NP}$ et $\overline{KN} = \overline{MP}$. Ainsi, comme il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, on en conclut que, si A et A′ sont de l'ordre a, B et B′ de l'ordre b, a étant différent de b, et que l'on ait l'équation

$$A + B = A' + B',$$

il en résulte les deux équations $A = A'$, $B = B'$.

11. Passons à la multiplication des lignes dirigées, et proposons-nous d'abord de construire le produit $\overline{KB} \times \overline{KC}$

Fig. 7.



(*fig.* 7), dont les facteurs sont des unités non primes. Soit pris angle $\overline{CKD}$ = angle $\overline{AKB}$.

D'après ce qui a été dit plus haut, n° 4, note (*), on aura

$$\overline{KA} : \overline{KB} :: \overline{KC} : \overline{KD},$$

d'où

$$\overline{KA} \times \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC};$$

mais

$$\overline{KA} = +1,$$

donc

$$\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KD}.$$

Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit : c'est encore une multiplication logarithmique. Il n'est pas nécessaire de montrer que cette règle a lieu pour un nombre quelconque de facteurs.

Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\overline{KB}$, $n.\overline{KC}, \ldots$, $m, n, \ldots$ étant des coefficients ou lignes primes positives; et le produit sera

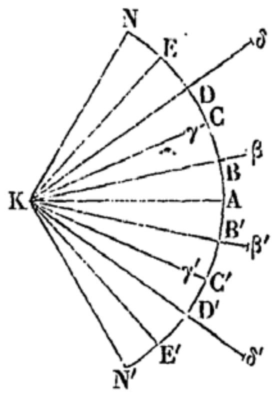
$$(mn\ldots).(\overline{KB}.\overline{KC}\ldots) = (mn\ldots).\overline{KP}.$$

Or le produit de la ligne prime positive $(mn\ldots)$ par le rayon $\overline{KP}$ n'est autre chose que cette même ligne tirée dans la direction de ce rayon.

La division s'opérera par une marche inverse, qu'il serait superflu de détailler.

12. Avec ces règles, on opérera une construction quelconque des lignes dirigées, comme on pratique celles des lignes absolues. On peut maintenant passer à quelques applications des principes qui viennent d'être exposés, et on énoncera d'abord quelques conséquences immédiates, qui sont de nature à avoir un emploi plus fréquent.

Fig. 8.



§ 1. Si AB, BC, ..., EN (*fig.* 8) sont des arcs égaux au nombre de n, et qu'on fasse

$$\overline{KB} = u,$$

on aura

$$\overline{KC} = u^2,$$
$$\overline{KD} = u^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\overline{KN} = u^n.$$

§ 2. Si l'on trace les arcs inférieurs AB′, B′C′, ...,

$E'N'$, on aura

$$\overline{KB'} = \frac{1}{u},$$

$$\overline{KC'} = \frac{1}{u^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\overline{KN'} = \frac{1}{u^n}.$$

§ 3. Donc

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KB'}} = u^2,$$

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} = u^4,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KN'}} = u^{2n}.$$

§ 4. Si l'on prend, sur des rayons correspondants,

$$K\beta = K\beta',$$

$$K\gamma = K\gamma',$$

$$K\delta = K\delta',$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

les longueurs $K\beta$, $K\gamma$, $K\delta$,... étant à volonté, on aura encore

$$\frac{\overline{K\beta}}{\overline{K\beta'}} = u^7,$$

$$\frac{\overline{K\gamma}}{\overline{K\gamma'}} = u^4,$$

$$\frac{\overline{K\delta}}{\overline{K\delta'}} = u^6,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 5. Si l'on construit sur les rayons $\overline{KA}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$, considérés comme bases, des figures égales et semblables, et que $\overline{a}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$ soient des lignes homologues, on aura

$$\overline{m} = \overline{a} \times \overline{KM},$$

$$\overline{n} = \overline{a} \times \overline{KN}.$$

d'où

$$\frac{\overline{m}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{n}}{\overline{KN}}, \quad \text{ou} \quad \overline{m}.\overline{KN} = \overline{n}.\overline{KM}.$$

§ 6. MN étant un arc pris dans un lieu quelconque de la circonférence, il peut être quelquefois commode de désigner, en général, par $\overline{K.MN}$ le rayon en direction tiré par l'extrémité B de l'arc AB $=$ MN, A étant toujours l'origine des arcs. On aura ainsi

$$\overline{K.MN} \times \overline{K.PQ} = \overline{K.(MN + PQ)},$$

et

$$\frac{\overline{K.MN}}{\overline{K.PQ}} = \overline{K.(MN - PQ)}.$$

§ 7. Si $\overline{KB}$ est l'espèce à laquelle appartient une ligne en direction $\overline{PQ}$, on a

$$\overline{PQ} = PQ \times \overline{KB};$$

car on peut regarder la ligne absolue PQ comme prime positive.

§ 8. Si l'on a l'équation

$$r'.\overline{PQ} = r''.\overline{MN},$$

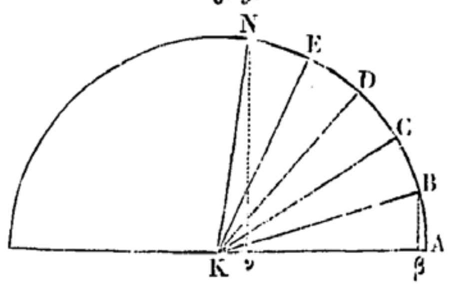
r', r'' étant des rayons en direction inconnus, et $\overline{PQ}$, $\overline{MN}$ des lignes de même espèce ou des lignes absolues, il s'ensuit que

$$r' = r'',$$

et, par conséquent,

$$\overline{PQ} = \overline{MN}, \quad \text{ou} \quad \overline{PQ} = \overline{MN}.$$

Fig. 9.



13. Soient maintenant AB, BC,..., EN (*fig.* 9) des arcs égaux au nombre de n; on a

$$\overline{KN} = \overline{KB}^n;$$

mais

$$\overline{KN} = \overline{K\nu} + \overline{\nu N}, \quad \text{et} \quad \overline{KB} = \overline{K\beta} + \overline{\beta B};$$

donc

$$\overline{K\nu} + \overline{\nu N} = (\overline{K\beta} + \overline{\beta B})^n.$$

Faisons l'arc $AB = a$, et par conséquent $AN = na$,

$$\overline{K\beta} = \cos a, \qquad \overline{K\nu} = \cos na,$$
$$\overline{\beta B} = \sim \sin a, \quad \overline{\nu N} = \sim \sin na;$$

l'équation précédente devient

$$\cos na \sim \sin a = (\cos a \sim \sin a)^n.$$

Ce théorème, exprimé, avec la notation ordinaire, par

$$\cos na \pm \sqrt{-1}\,.\,\sin na = (\cos a \pm \sqrt{-1}\,.\,\sin a)^n,$$

est fondamental dans la théorie des fonctions circulaires; entre autres usages, il sert à exprimer en séries les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$.

En développant le binôme, séparant les termes d'ordre différents, et divisant par ~ 1 l'équation donnée par les termes médianes, on a l'expression de $\cos na$ et $\sin na$; faisant ensuite $na = x$, et supposant que n augmente et que a diminue indéfiniment, x restant constant, on obtient, par les limites,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots.$$

14. De $\overline{KN} = \overline{KB}^n$ on tire

$$\overline{KB} = \overline{KN}^{\frac{1}{n}},$$

ou

$$\overline{K\beta} + \overline{\beta B} = (\overline{K\nu} + \overline{\nu N})^{\frac{1}{n}}$$

$$= \overline{K\nu}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\overline{K\nu}^{\frac{1}{n}-1}.\overline{\nu N} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\overline{K\nu}^{\frac{1}{n}-2}.\overline{\nu N}^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.3}\overline{K\nu}^{\frac{1}{n}-3}.\overline{\nu N}^3 + \ldots$$

$$= \overline{K\nu}^{\frac{1}{n}}\left[1 + \frac{1}{n}.\frac{\overline{\nu N}}{\overline{K\nu}} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}.\left(\frac{\overline{\nu N}}{\overline{K\nu}}\right)^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.3}.\left(\frac{\overline{\nu N}}{\overline{K\nu}}\right)^3 + \cdots\right].$$

Substituant les valeurs précédentes et faisant attention que

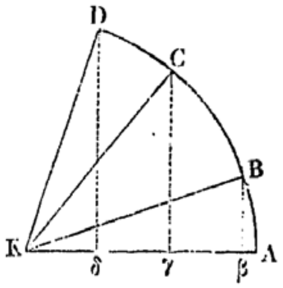
$$\frac{\overline{\nu N}}{\overline{K\nu}} = \frac{\sim \sin na}{\cos na} = \sim \operatorname{tang} na,$$

on effectuera la séparation, et l'équation provenant des termes médianes, étant multipliée par $\frac{n}{\sim 1} = + n$, donnera, par la même supposition qui a été faite plus haut,

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tang}^7 x}{7} + \cdots$$

13. Soient (*fig.* 10) les arcs AB $= a$, AC $= b$. Qu'on

Fig. 10.



prenne CD = AB, on aura (n° **11**)

$$\overline{KD} = \overline{KB} \times KC;$$

mais

$$\overline{KD} = \overline{K\delta} + \overline{\delta D} = \cos(a+b) \sim \sin(a+b),$$
$$\overline{KB} = \overline{K\beta} + \overline{\beta B} = \cos a \sim \sin a,$$
$$\overline{KC} = \overline{K\gamma} + \overline{\gamma C} = \cos b \sim \sin b;$$

donc

$$\cos(a+b) \sim \sin(a+b) = (\cos a \sim \sin a)(\cos b \sim \sin b).$$

En effectuant la multiplication du second membre et séparant les ordres, on a

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

A Monsieur
Gergonne
à Nîmes

DE L'IMPRIMERIE DE DUMINIL-LESUEUR,
rue de Harpe, N°. 78.