RECHERCHES SUR LE DEGRÉ DES ÉQUATIONS RÉSULTANTES DE L'ÉVANOUISSEMENT DES INCONNUES,

Et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Équations.

Par M. BÉZOUT.

LES Recherches dont je vais exposer les résultats dans ce Mémoire, doivent naissance à celles dont je continue de m'occuper sur la résolution algébrique des équations; quelque route qu'on prenne pour résoudre ce dernier problème, on aura toujours à éliminer plusieurs inconnues dont les rapports seront exprimés par des équations plus ou moins élevées; c'est donc préparer les voies que de travailler à perfectionner les méthodes d'élimination; & pour y parvenir, le problème qu'on doit se proposer est, ce me semble, *de déterminer à quel degré doit monter l'équation résultante de l'élimination:* en effet, cette connoissance une fois établie, on a, si je puis m'exprimer ainsi, la pierre de touche à l'aide de laquelle on peut juger du mérite des méthodes qu'on se propose d'employer pour éliminer.

Si les méthodes d'élimination n'avoient d'autre utilité que leur application à la résolution algébrique des équations, je me serois contenté de ce qui peut avoir rapport à ce dernier objet & je l'aurois réuni avec ce que j'ai pu trouver jusqu'à présent sur cette matière; mais ces méthodes ont une application beaucoup plus étendue & telle qu'elles deviennent indispensables dans tous les problèmes où il y a plus d'une inconnue. En effet, si on a des méthodes pour résoudre, par approximation, les problèmes déterminés lorsqu'on n'a qu'une seule équation, on n'en n'en a pas de même pour les résoudre par approximation lorsque les relations des inconnues, qui en sont l'objet, restent, pour ainsi dire, dispersées dans plusieurs équations; ainsi quand même on seroit condamné pour toujours à résoudre par approximation, les méthodes d'élimination n'en seroient pas moins indispensables.

Mais pour ne point envelopper dans mon travail ce qui peut appartenir à d'autres, je crois devoir donner un tableau de l'état présent de l'analyse considérée relativement à cette partie.

M. Newton est le premier, je pense, qui ait donné des méthodes générales pour éliminer les inconnues : ces méthodes s'appliquent avec succès à un certain nombre d'exemples choisis; mais lorsqu'on les applique à des degrés un peu élevés, elles conduisent à des équations qui, à la vérité, renferment les racines utiles au problème, mais qui en admettent en même temps d'inutiles, & cela en nombre d'autant plus grand, que le nombre des équations & le degré de chacune deviennent plus élevés : cet inconvénient fait naître deux difficultés; celle de démêler les racines utiles d'avec les inutiles, & celle d'être obligé souvent d'abandonner comme interminable un calcul qu'avec une autre méthode on peut conduire à sa fin.

Ces difficultés ont frappé M.rs Euler *(a)* & Cramer *(b)*, & l'un & l'autre de ces deux savans Analystes y ont apporté remède, mais uniquement pour le cas où l'on n'auroit que deux équations & deux inconnues; les méthodes qu'ils ont données sont très-dignes de la sagacité de leurs auteurs, & je n'aurois pas été tenté d'en chercher de nouvelles si elles eussent été également applicables à un plus grand nombre d'équations; mais telle est la nature de ces méthodes, qu'elle exige que pour éliminer on compare les équations deux à deux : or on verra dans la suite de ce Mémoire, que ce procédé conduit à des équations beaucoup plus élevées qu'il ne faut, & pour n'en

(a) Mémoires de l'Académie de Berlin, *année 1748.*
(b) Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques, *dans l'appendice.*

citer qu'un exemple, qui certainement n'est pas le plus frappant, si l'on a trois équations du 3.^e degré, par exemple, & qu'on élimine par la comparaison des équations deux à deux, l'équation finale sera du 81.^e degré; cependant nous verrons qu'elle ne doit pas passer le 49.^e

La méthode de Newton n'exige pas, à la vérité, qu'on élimine par la comparaison des équations deux à deux; mais elle n'en a pas pour cela aucun avantage sur celle de M.^rs Euler & Cramer, dans le cas où l'on a plus de deux équations; au contraire, elle fait encore acquérir à l'équation finale de nouveaux facteurs inutiles.

Mais ce qui rendra encore plus sensible le besoin que l'on a de méthodes d'élimination, c'est la réflexion suivante.

Tant qu'on n'a que deux équations & deux inconnues, de quelque manière qu'on s'y prenne pour éliminer, on parviendra à une équation qui, si elle est plus élevée qu'elle ne doit être, aura un diviseur; à la vérité le travail qu'il faudra faire pour trouver ce diviseur, sera de nature, dans plusieurs cas, à rebuter le Calculateur le plus intrépide; mais enfin il est trouvable: il n'en est pas de même quand, ayant plus de deux équations, on élimine en les comparant deux à deux; quand on ne feroit monter chaque équation résultante de l'évanouissement d'une inconnue qu'au degré précis où elle doit monter, en vain chercheroit-on dans chacune le diviseur qui, en les abaissant, feroit que l'équation finale seroit d'un moindre degré; aucune n'aura de diviseur; ce ne pourra être qu'en les comparant entr'elles qu'on trouvera une équation qui aura en effet un diviseur; mais quel est le fil qui conduiroit dans ce labyrinthe! C'est ce qu'il n'est pas aisé de déterminer: heureusement on peut s'en passer, en employant les méthodes que nous proposons dans ce Mémoire. Je crois donc pouvoir dire, qu'excepté le cas où l'on n'a que deux équations, on n'a pas de méthode certaine pour conduire l'équation finale directement au degré qu'elle ne doit pas passer, non plus que pour déterminer quel doit être ce degré.

Ce sont-là les deux objets que je me suis proposé dans ce Mémoire. Quoique les équations à deux inconnues aient été traitées, j'ai pensé qu'il ne feroit pas inutile de revenir sur cet objet, non que je prétende décider ma méthode préférable à celle que M.^rs Euler & Cramer ont donnée pour ce cas seulement, mais parce que cette même méthode étant uniforme, j'ai cru me rendre plus clair en fortifiant l'analogie par la réunion de ce cas avec les autres, & en même temps parce que dans un travail aussi long que l'est souvent celui de l'élimination, il n'est pas inutile de multiplier les méthodes sur lesquelles les Calculateurs peuvent porter leur choix.

Je réduis, dans ce Mémoire, tout le travail de l'élimination, à quelque degré que montent les équations, je le réduis, dis-je, à éliminer des inconnues au 1.^er degré; il n'y a encore que fort peu de temps qu'on a une méthode pour trouver la valeur des inconnues dans les équations du 1.^er degré d'une manière simple & sans que cette valeur soit compliquée de quelque facteur inutile; quand ces équations ont toute la généralité dont elles sont susceptibles, la méthode ordinaire les donne sous une forme plus compliquée qu'elles ne sont réellement.

M. Cramer a donné une règle générale pour les exprimer toutes débarrassées de ce facteur: j'aurois pu m'en tenir à cette règle; mais l'usage m'a fait connoître que quoiqu'elle soit assez simple, quant aux lettres, elle ne l'est pas de même à l'égard des signes lorsqu'on a au-delà d'un certain nombre d'inconnues à calculer; j'ai donc cru devoir revenir sur cet objet. Il me semble avoir réduit le travail à n'exiger d'autre attention que celle qu'il faut pour écrire des lettres: quoique le lemme suivant, qui la renferme, ne l'énonce pas expressément, il sera facile de l'en déduire; je ne crois pas devoir m'y arrêter, n'ayant pas tant à calculer ces inconnues elles-mêmes que le résultat de leur substitution dans l'une des équations, & c'est proprement ce que renferme ce même lemme. Je me borne, dans ce Mémoire, à éliminer les inconnues dans les équations de différens degrés, l'une après l'autre: si le temps me permet de pousser plus loin mes recherches, je ne désespère pas d'ajouter quelque degré de perfection à ces méthodes.

LEMME I.

Si l'on a un nombre n d'équations du premier degré qui renferment chacune un pareil nombre d'inconnues, ſans aucun terme abſolument connu, on trouvera par la règle ſuivante la relation que doivent avoir les coëfficiens de ces inconnues pour que toutes ces équations aient lieu.

Soient a, b, c, d, &c. les coëfficiens de ces inconnues dans la première équation.

a', b', c', d', &c. les coëfficiens des mêmes inconnues dans la ſeconde équation.

a'', b'', c'', d'', &c. ceux de la troiſième & ainſi de ſuite.

Formez les deux permutations ab & ba & écrivez $ab - ba$; avec ces deux permutations & la lettre c, formez toutes les permutations poſſibles, en obſervant de changer de ſigne toutes les fois que c changera de place dans ab & la même choſe à l'égard de ba; vous aurez

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Avec ces ſix permutations & la lettre d, formez toutes les permutations poſſibles, en obſervant de changer de ſigne à chaque fois que d changera de place dans un même terme; vous aurez

$$abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adcb + dacb + cabd - cadb + cdab - dcab$$
$$- bacd + badc - bdac + dbac + bcad - bcda + bdca - dbca - cbad + cbda - cdba + dcba$$

& ainſi de ſuite juſqu'à ce que vous ayez épuiſé tous les coëfficiens de la première équation.

Alors conſervez les lettres qui occupent la première place; donnez à celles qui occupent la ſeconde, la même marque qu'elles ont dans la ſeconde équation; à celles qui occupent la troiſième, la même marque qu'elles ont dans la troiſième équation, & ainſi de ſuite; égalez enfin le tout à zéro & vous aurez l'équation de condition cherchée.

Ainſi ſi vous avez deux équations & deux inconnues comme

$$ax + by = 0$$
$$a'x + b'y = 0$$

L'équation de condition ſera $ab' - ba' = 0$ ou $ab' - a'b = 0$.

Si vous avez trois équations & trois inconnues comme il ſuit :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= 0 \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= 0 \end{aligned}$$

l'équation de condition ſera

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0,$$

ou

$$ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c = 0,$$

Si vous avez quatre équations & quatre inconnues comme il ſuit :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + d\,t &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,t &= 0 \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z + d''\,t &= 0 \\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''\,t &= 0 \end{aligned}$$

l'équation de condition, après avoir rétabli l'ordre alphabétique, ſera

$$\begin{aligned} & a b' c'' d''' - a b' c''' d'' + a b'' c''' d' - a' b'' c''' d - a b'' c' d''' \\ & + a b''' c' d'' - a b''' c'' d' + a' b''' c'' d + a' b'' c d''' - a' b''' c d'' \\ & + a'' b''' c d' - a'' b''' c' d - a' b c'' d''' + a' b c''' d'' - a'' b c''' d' \\ & + a'' b' c''' d + a'' b c' d''' - a''' b c' d'' + a''' b c'' d' - a''' b' c'' d \\ & - a'' b' c d''' + a''' b' c d'' - a''' b'' c d' + a''' b'' c' d = 0; \end{aligned}$$

mais comme ces équations de condition doivent ſervir de formules pour l'élimination dans les équations de différens degrés, il convient de leur donner une forme qui rende les ſubſtitutions le moins pénibles qu'il ſe pourra ; pour cet effet, je les mets ſous cette forme :

$$ab' - a'b = 0,$$

$$(ab' - a'b)\,c'' + (a''b - ab'')\,c' + (a'b'' - a''b')\,c = 0,$$

$$\begin{aligned} & [(ab' - a'b)\,c'' + (a''b - ab'')\,c' + (a'b'' - a''b')\,c]\,d''' \\ & + [(a'b - ab')\,c''' + (ab''' - a'''b)\,c' + (a'''b' - a'b''')\,c]\,d'' \\ & + [(a'''b - ab''')\,c'' + (ab'' - a''b)\,c''' + (a''b''' - a'''b'')\,c]\,d' \\ & + [(a'b''' - a'''b')\,c'' + (a'''b'' - a''b''')\,c' + (a''b' - a'b'')\,c''']\,d = 0. \end{aligned}$$

Cette nouvelle forme a deux avantages; le premier, de rendre les ſubſtitutions à venir, plus commodes; le deuxième, c'eſt d'offrir une règle encore plus ſimple pour la formation de ces formules.

En effet, il eſt facile de remarquer 1.° que le premier terme de l'une quelconque de ces équations, eſt formé du premier membre de l'équation précédente, multiplié par la première des lettres qu'elle ne renferme point, cette lettre étant affectée de la marque qui ſuit immédiatement la plus haute de celles qui entrent dans ce même membre.

2.° Le deuxième terme ſe forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle qui eſt immédiatement au-deſſous & réciproquement, & de plus en changeant les ſignes.

3.° Le troiſième, ſe forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle de deux numéros au-deſſous & réciproquement, & de plus en changeant les ſignes.

4.° Le quatrième, ſe forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle de trois numéros au-deſſous & réciproquement, & changeant les ſignes, & toujours de même pour les ſuivans.

Par exemple, la deuxième équation de condition a pour premier terme $ab' - a'b$, qui eſt le premier membre de la première, multiplié par c'', qui eſt la lettre qui ſuit immédiatement les lettres a & b, & qui a la marque $''$ qui ſuit immédiatement la marque $'$, la plus haute de celles qui entrent dans $ab' - a'b$.

Le deuxième terme de cette ſeconde équation de condition eſt $(a''b - ab'')c'$, qui n'eſt autre choſe que $(ab' - a'b)c''$, dans lequel on a changé les ſignes, & $''$ en $'$, & $'$ en $''$; & ainſi de ſuite.

D'après ces obſervations, il ſera facile de voir que l'équation de condition pour cinq inconnues & cinq équations, ſera

$$
\left.\begin{array}{l}
\;\;\;[(a b' - a' b)c'' + (a'' b - a b'')c' + (a' b'' - a'' b')c\,]\,d''' \\
+\,[(a' b - a b')c''' + (a b''' - a''' b)c' + (a''' b' - a' b''')c\,]\,d'' \\
+\,[(a''' b - a b''')c'' + (a b'' - a'' b)c''' + (a'' b''' - a''' b'')c\,]\,d' \\
+\,[(a' b''' - a''' b')c'' + (a''' b'' - a'' b''')c' + (a'' b' - a' b'')c'''\,]\,d
\end{array}\right\} e''''
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\,[(a' b - a b')c'' + (a b'' - a'' b)c' + (a'' b' - a' b'')c\,]\,d'''' \\
+\,[(a b' - a' b)c'''' + (a'''' b - a b'''')c' + (a' b'''' - a'''' b')c\,]\,d'' \\
+\,[(a b'''' - a'''' b)c'' + (a'' b - a b'')c'''' + (a'''' b'' - a'' b'''')c\,]\,d' \\
+\,[(a'''' b' - a' b'''')c'' + (a'' b'''' - a'''' b'')c' + (a' b'' - a'' b')c''''\,]\,d
\end{array}\right\} e'''
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\,[(a' b - a b')c'''' + (a b'''' - a'''' b)c' + (a'''' b' - a' b'''')c\,]\,d''' \\
+\,[(a b' - a' b)c''' + (a''' b - a b''')c' + (a' b''' - a''' b')c\,]\,d'''' \\
+\,[(a b''' - a''' b)c'''' + (a'''' b - a b'''')c''' + (a''' b'''' - a'''' b''')c\,]\,d' \\
+\,[(a''' b' - a' b''')c'''' + (a'''' b''' - a''' b'''')c' + (a' b'''' - a'''' b')c'''\,]\,d
\end{array}\right\} e''
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\,[(a'''' b - a b'''')c'' + (a b'' - a'' b)c'''' + (a'' b'''' - a'''' b'')e\,]\,d' \\
+\,[(a b'''' - a'''' b)c''' + (a''' b - a b''')c'''' + (a'''' b''' - a''' b'''')c\,]\,d'' \\
+\,[(a b''' - a''' b)c'' + (a'' b - a b'')c''' + (a''' b'' - a'' b''')c\,]\,d'''' \\
+\,[(a''' b'''' - a'''' b''')c'' + (a'' b''' - a''' b'')c'''' + (a'''' b'' - a'' b'''')c'''\,]\,d
\end{array}\right\} e'
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\,[(a' b'''' - a'''' b')c'' + (a'''' b'' - a'' b'''')c' + (a'' b' - a' b'')c''''\,]\,d''' \\
+\,[(a'''' b' - a' b'''')c''' + (a''' b'''' - a'''' b''')c' + (a' b''' - a''' b')c''''\,]\,d'' \\
+\,[(a'''' b''' - a''' b'''')c'' + (a'' b'''' - a'''' b'')c''' + (a''' b'' - a'' b''')c''''\,]\,d' \\
+\,[(a''' b' - a' b''')c'' + (a'' b''' - a''' b'')c' + (a' b'' - a'' b')c'''\,]\,d''''
\end{array}\right\} e
$$

$$= 0.$$

COROLLAIRE.

Chacun des termes de l'équation de condition a donc essentiellement le même nombre de facteurs, & ces facteurs sont tellement combinés que jamais, dans un même terme, il ne s'y en rencontre deux qui appartiennent à une même inconnue.

LEMME II.

Si on a un nombre quelconque n de quantités $a, b, c, d, e,$ &c. & qu'au-dessous de chacune de ces quantités, on écrive les progressions arithmétiques suivantes,

$$\begin{array}{llllll}
a, & b, & c, & d, & e, & f \\
a + k, & b + k, & c + k, & d + k, & e + k, & f + k \\
a + 2k, & b + 2k, & c + 2k, & d + 2k, & e + 2k, & f + 2k \\
a + 3k, & b + 3k, & c + 3k, & d + 3k, & e + 3k, & f + 3k \\
a + 4k, & b + 4k, & c + 4k, & d + 4k, & e + 4k, & f + 4k \\
a + 5k, & b + 5k, & c + 5k, & d + 5k, & e + 5k, & f + 5k
\end{array}$$

en continuant les progreſſions juſqu'à ce que le nombre des termes de chacune ſoit égal au nombre n des quantités, je dis que dans quelque ordre qu'on ajoute n termes de ces progreſſions, pourvu qu'on n'y comprenne jamais deux termes d'une même colonne ni deux termes d'une même bande, la ſomme ſera toujours la même & $= S + n \cdot \frac{n-1}{2} k$, S marquant la ſomme des termes qui compoſent la première bande.

Cette propoſition eſt ſi facile à démontrer, que je ne m'y arrêterai pas.

Il eſt encore évident que la propoſition eſt la même ſi les progreſſions étoient telles qu'il ſuit :

$$\begin{array}{llllll}
a, & b - 3k, & c - 2k, & d + 3k, & e, & f + k \\
a + 1k, & b - 2k, & c - k, & d + 4k, & e + k, & f + 2k \\
a + 2k, & b - k, & c, & d + 5k, & e + 2k, & f + 3k \\
a + 3k, & b, & c + k, & d + 6k, & e + 3k, & f + 4k \\
a + 4k, & b + k, & c + 2k, & d + 7k, & e + 4k, & f + 5k \\
a + 5k, & b + 2k, & c + 3k, & d + 8k, & e + 5k, & f + 6k
\end{array}$$

la ſomme ſera toujours égale à la ſomme des termes qui compoſent la première bande, $+ n \cdot \frac{n-1}{2} k$, c'eſt-à-dire, dans le cas préſent, $= a + b + c + d + e + f - 3k - 2k + 3k + k + 6 \cdot \frac{5}{2} k = a + b + c + d + e + 14k$.

Les progreſſions pourroient encore ne pas commencer toutes à la à la même ligne & même avoir plusieurs lacunes; la somme des termes pris suivant l'énoncé du lemme, sera toujours la même; bien entendu qu'on ajoutera réellement n termes, c'est-à-dire qu'on ne comptera point une lacune pour un terme: ainsi si l'on avoit

$$\begin{array}{lllll} a, & b, & & & \\ a + k, & b + k, & c - k, & d + k, & e, \\ a + 2k, & & c, & & e + k, \\ a + 3k, & b + 3k, & c + k, & d + 3k, & e + 2k, \\ a + 4k, & b + 4k, & & d + 4k, & e + 3k, \end{array}$$

si vous prenez cinq termes, de manière qu'il ne s'en trouve point deux d'une même colonne, ni deux d'une même bande, vous aurez toujours $a + b + c + d + e + 7k$.

L'expression générale de la somme sera encore $S + n \cdot \frac{n-1}{2} k$, en entendant par S la somme des termes qui composeroient la première bande, si les progressions étoient prolongées jusqu'à cette bande; ainsi dans le cas présent où ces termes seroient $a, b, c - 2k, d, e - k$, on auroit $S = a + b + c - 2k + d + e - k$, & par conséquent la somme cherchée $= a + b + c - 2k + d + e - k + 5 \cdot \frac{4}{2} k = a + b + c + d + e + 7k$.

COROLLAIRE.

Puisque les coëfficiens des inconnues, que nous avons considérées dans le *lemme I*, entrent toujours dans la composition de chaque terme de l'équation de condition, en pareil nombre, & de manière que jamais deux coëfficiens d'une même inconnue ne s'y rencontrent, il s'ensuit que si ces coëfficiens étoient des fonctions d'une ou de plusieurs quantités dont la plus haute dimension formât, dans les coëfficiens d'une même inconnue, une progression arithmétique, & si en même temps ces progressions avoient toutes une différence commune, il s'ensuit, dis-je, que dans l'équation de condition, la plus haute dimension des quantités, dont les coëfficiens sont des fonctions, seroit $S + n \cdot \frac{n-1}{2} k$, S marquant la somme des plus hautes dimensions dans les coëfficiens de la première équation, ou ce que cette somme seroit si toutes les progressions étoient prolongées jusqu'à cette équation, & k la différence des plus hautes dimensions d'une équation à l'autre.

APPLICATION de ce qui précède, à la recherche de la plus haute dimension de l'équation finale, résultante de l'évanouissement des inconnues dans les équations de plusieurs degrés.

I.

Des Équations à deux inconnues.

$$\text{Soient} \begin{cases} A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + D x^{m-3} + E x^{m-4} + \ldots\ldots V = 0 \ (L) \\ A' x^{m'} + B' x^{m'-1} + C' x^{m'-2} + D' x^{m'-3} + E' x^{m'-4} + \ldots\ldots V' = 0 \ (L') \end{cases}$$

deux équations dans lesquelles A, B, C, D, &c. soient des fonctions d'une même inconnue y, & de connues; savoir A, de p dimensions; B, de $p + 1$ dimensions; C, de $p + 2$ dimensions, & ainsi de suite; & que A', B', C', &c. aient aussi des dimensions qui soient exprimées respectivement par p', $p' + 1$, $p' + 2$, &c. La question d'éliminer x, se réduit à trouver une fonction de x, par laquelle multipliant la première équation, & une autre fonction de x, par laquelle multipliant la seconde, la somme des deux produits soit telle que chaque puissance de x disparoisse; alors l'équation, réduite à son terme sans x, exprimera nécessairement l'équation en y, nécessaire pour que les équations proposées aient lieu.

$$\text{Soient donc} \begin{cases} M x^n + N x^{n-1} + P x^{n-2} + Q x^{n-3} + R x^{n-4} + \ldots\ldots\ldots T \\ M' x^{n'} + N' x^{n'-1} + P' x^{n'-2} + Q' x^{n'-3} + R' x^{n'-4} + \ldots\ldots\ldots T' \end{cases}$$

ces deux fonctions de x; en faisant les multiplications, on aura

$$\begin{array}{llllll}
AMx^{m+n} & + BMx^{m+n-1} & + CMx^{m+n-2} & + DMx^{m+n-3} & + EMx^{m+n-4} & + \ldots . VT = 0 \\
+ A'M'x^{m'+n'} & + ANx^{m+n-1} & + BNx^{m+n-2} & + CNx^{m+n-3} & + DNx^{m+n-4} & + V'T' \\
 & + B'M'x^{m'+n'-1} & + APx^{m+n-2} & + BPx^{m+n-3} & + CPx^{m+n-4} & \\
 & + A'N'x^{m'+n'-1} & + C'M'x^{m'+n'-2} & + AQx^{m+n-3} & + BQx^{m+n-4} & \\
 & & + B'N'x^{m'+n'-2} & + D'M'x^{m'+n'-3} & + ARx^{m+n-4} & \\
 & & + A'P'x^{m'+n'-2} & + C'N'x^{m'+n'-3} & + E'M'x^{m'+n'-4} & \\
 & & & + B'P'x^{m'+n'-3} & + D'N'x^{m'+n'-4} & \\
 & & & + A'Q'x^{m'+n'-3} & + C'P'x^{m'+n'-4} & \\
 & & & & + B'Q'x^{m'+n'-4} & \\
 & & & & + A'R'x^{m'+n'-4} &
\end{array}$$

& la condition que chaque puissance de x disparoisse, donnera les équations suivantes, $m + n = m' + n'$, &

$$\begin{array}{r}
AM + A'M' = 0 \\
AN + A'N' + BM + B'M' = 0 \\
AP + A'P' + BN + B'N' + CM + C'M' = 0 \\
AQ + A'Q' + BP + B'P' + CN + C'N' + DM + D'M' = 0 \\
AR + A'R' + BQ + B'Q' + CP + C'P' + DN + D'N' + EM + E'M' = 0 \text{ \&c;}
\end{array}$$

& par conséquent $VT + V'T' = 0$.

Il faut de plus que le nombre des coëfficiens indéterminés, soit égal au nombre total de ces équations, c'est-à-dire $= m + n + 1$; car quoique le nombre des puissances de x ne soit que $m + n$; comme chaque terme qui entre dans les équations ci-dessus est affecté d'une quantité inconnue, il y aura nécessairement une de ces inconnues qui restera indéterminée, & qui disparoîtra par la division lorsqu'on substituera dans l'équation $VT + V'T' = 0$;
donc $m + n + 1 = n + 1 + n' + 1$;
& par conséquent $n' = m - 1$ & $n = m' - 1$.

Donc si on a deux équations où x soit dans l'une au degré m, & dans l'autre au degré m'; pour en éliminer x, il faudra multiplier la première par un polynome indéterminé du degré $m' - 1$, & la seconde par un polynome indéterminé du degré $m - 1$, les ajouter & égaler à zéro les coëfficiens de chaque puissance de x, le dernier terme de la somme, sera l'équation en y.

On pourroit, en effet, suivre cette méthode; mais comme nous en donnerons, ci-après, une plus expéditive, nous ne considérerons les équations que nous venons d'exposer, que relativement au parti qu'on en peut tirer pour déterminer le degré de l'équation en y.

Il est facile de voir à l'inspection de ces équations, que les coëfficiens d'une même inconnue M ou N &c. M' ou N', &c. ont des dimensions en progression arithmétique, & que toutes ces progressions ont la même raison ou différence. Donc elles sont dans le cas du corollaire du lemme II, & par conséquent la plus haute dimension de y dans l'équation finale, sera, généralement parlant, $S + (m + n + 1) \times (\frac{m+n}{2k})$; il s'agit donc d'avoir les valeurs de S & de k; or 1.° $k = 1$; 2.° il est facile de voir que si les progressions étoient prolongées jusqu'à la première équation, les coëfficiens de M, N, P, Q, R, &c. auroient pour dimension $p, p - 1, p - 2, p - 3, p - 4$, & ceux de M', N', P', Q', R', auroient $p', p' - 1, p' - 2, p' - 3, p' - 4$, &c. ces deux progressions ayant, la première $n + 1$ termes, & la seconde $n' + 1$ termes; donc S est égale à la somme de ces deux progressions, c'est-à-dire que $S = (2p - n) . \frac{n+1}{2} + (2p' - n') \times \frac{n'+1}{2}$; donc si on nomme G la plus haute dimension cherchée de l'équation finale, on aura $G = (m + n + 1) \times (\frac{m+n}{2}) + (2p - n) . \frac{n+1}{2} + (2p' - n') . \frac{n'+1}{2}$, qui en substituant pour n & n' leurs valeurs trouvées ci-dessus, devient enfin $G = mm' + pm' + p'm$.

REMARQUE.

La valeur de p & celle de p' ne doivent pas toujours se prendre à l'inspection du coëfficient A & du coëfficient A', il faut partir du terme où la somme des exposans de x & y est la plus forte, & retrancher de cette somme l'exposant de x dans le premier terme; le nombre qu'on aura par cette soustraction sera ce qu'on doit prendre pour p, par exemple, si on avoit les deux équations suivantes:

$$a^3 x^5 y - 2 a^4 y^2 x^3 + y^8 x - a^9 = 0,$$
$$\& \; a^3 x^3 - 3 a^3 x y^2 + y^5 x - y^6 = 0;$$

la plus forte somme des exposans de x & de y, dans la première, est 9, dont je retranche l'exposant 5 de x dans le premier terme; ce qui donne $p = 4$. On trouvera de même que dans la seconde $p' = 3$, & par conséquent l'équation en y ne peut passer le degré $5 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 3$, c'est-à-dire le degré 42.

Au reste, la formule G n'indique le véritable exposant de l'équation finale que pour les équations à deux inconnues, considérées dans leur plus grande généralité; mais pour les cas particuliers, elle est la limite de cet exposant. La méthode que nous donnerons plus bas, pour éliminer, mettra à portée d'estimer cet exposant avec plus de précision dans chaque cas particulier.

II.

Des Équations à trois inconnues.

$$\text{Soient} \begin{cases} A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + D x^{m-3} + \ldots V = 0 \\ A' x^{m'} + B' x^{m'-1} + C' x^{m'-2} + D' x^{m'-3} + \ldots V' = 0 \\ A'' x^{m''} + B'' x^{m''-1} + C'' x^{m''-2} + D'' x^{m''-3} + \ldots V'' = 0 \end{cases}$$

Trois équations dans lesquelles A, B, C, &c. A', B', C', &c. A'', B'', C'', &c. soient des fonctions des deux inconnues y & z & de connues, telles que les dimensions de A, B, C, &c. soient p, $p + 1$, $p + 2$, &c. celles de $A' B' C'$, &c. soient p', $p' + 1$, $p' + 2$, &c. celles de A'', B'', C'', &c. soient p'', $p'' + 1$, $p'' + 2$, &c. Pour avoir les deux équations résultantes de l'évanouissement de x, il faut trouver trois fonctions de x les plus simples qu'il se puisse, qui multipliant respectivement ces trois équations, fassent que les puissances de x disparoissent de la somme des trois produits, & trois autres fonctions de x différentes des premières, mais les plus simples aussi qu'il se puisse, & qui aient la même propriété.

Soient donc $\begin{cases} M\,x^{n} + N\,x^{n-1} + P\,x^{n-2} + Q\,x^{n-3} + \ldots\ldots T \\ M'x^{n'-1} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + Q'x^{n'-3} + \ldots\ldots T' \\ M''x^{n''} + N''x^{n''-1} + P''x^{n''-2} + Q''x^{n''-3} + \ldots\ldots T'' \end{cases}$

les trois premières fonctions; en faisant les multiplications, & ajoutant les trois produits, on aura:

$$\begin{array}{lllll}
A\,M\,x^{m+n} & + B\,M\,x^{m+n-1} & + C\,M\,x^{m+n-1} & + D\,M\,x^{m+n-3} & + \ldots\ldots V\,T = 0 \\
+ A'M'x^{m'+n'} & + A\,N\,x^{m+n-1} & + B\,N\,x^{m+n-1} & + C\,N\,x^{m+n-3} & + V'T' \\
+ A''M''x^{m''+n''} & + B'M'x^{m'+n'-1} & + A\,P\,x^{m+n-1} & + B\,P\,x^{m+n-3} & + V''T'' \\
 & + A'N'x^{m'+n'-1} & + C'M'x^{m'+n'-1} & + A\,Q\,x^{m+n-3} & \\
 & B''M''x^{m''+n''-1} & + B'M'x^{m'+n'-1} & + D'M'x^{m'+n'-3} & \\
 & A''N''x^{m''+n''-1} & + A'P'x^{m''+n''-1} & + C'N'x^{m'+n'-3} & \\
 & & + C''M''x^{m''+n''-1} & + B'P'x^{m'+n'-3} & \\
 & & + B''N''x^{m''+n''-1} & + A'Q'x^{m'+n'-3} & \\
 & & + A''P''x^{m''+n''-1} & + D''M''x^{m''+n''-3} & \\
 & & & + C''N''x^{m''+n''-3} & \\
 & & & + B''P''x^{m''+n''-3} & \\
 & & & + A''Q''x^{m''+n''-3} &
\end{array}$$

Supposons d'abord $m + n = m' + n'$ & $m + n > m'' + n''$, ou tout au plus égal; pour que tous les termes en x puissent se détruire, il faut que le nombre des coëfficiens indéterminés soit $m + n + 1$; donc $m + n + 1 = n + 1 + n' + 1 + n'' + 1$, donc $n' = m - n'' - 2$, & $n = m' - n'' - 2$. Cela posé, si on égale à zéro les coëfficiens de chaque puissance de x, on formera une suite d'équations dans laquelle il est aisé de voir 1.° que les dimensions des coëfficiens d'une même inconnue M ou N, formeront une progression arithmétique; 2.° que toutes ces progressions arithmétiques auront une même raison; 3.° que si on continuoit ces progressions jusqu'à la première de ces équations, les nombres qui marqueront les dimensions que les coëfficiens de M, N, P, &c. y devroient avoir, sont p, $p - 1$, $p - 2$, &c. le nombre des termes étant $n + 1$; 4.° que les nombres qui, dans la même supposition, marqueroient les dimensions de M', N', P', &c. sont p', $p' - 1$, $p' - 2$, &c. jusqu'à un nombre de termes $= n' + 1$; 5.° qu'à quelque terme que puisse répondre celui qui a pour exposant $m'' + n''$, sa place dans la suite des équations sera la même que dans celles des puissances de x, & par conséquent exprimée par $m + n - m'' - n'' + 1$; donc pour déterminer quelle devroit être la dimension du coëfficient de M'' dans la première équation, il faut retrograder de $m + n - m'' - n''$ équations; donc le nombre qui marqueroit cette dimension seroit $p'' - m - n + m'' + n''$, & par conséquent les nombres qui marqueroient dans la première équation les dimensions de M'', N'', P'', si ces quantités s'y trouvoient, sont $p'' - m - n + m'' + n''$, $p'' - m - n + m'' + n'' - 1$, $p'' - m - n + m'' + n'' - 2$, &c. jusqu'à un nombre de termes $= n'' + 1$.

De-là & du corollaire du lemme II, il est aisé de conclure 1.° que le nombre G qui exprimera la plus haute dimension de l'équation en y & z, résultante de la comparaison des $m + n + 1$ équations, sera $G = S + (m + n + 1) \frac{m+n}{2} k$; 2.° que $k = 1$; 3.° que $S = (2p - n) \left(\frac{n+1}{2}\right) + (2p' - n') \left(\frac{n'+1}{2}\right) + (2p'' - 2m - 2n + 2m'' + n'') \left(\frac{n''+1}{2}\right)$, & par conséquent $G = (m + n + 1) \left(\frac{m+n}{2}\right) + (2p - n) \left(\frac{n+1}{2}\right) + (2p' - n') \left(\frac{n'+1}{2}\right) + (2p'' - 2m - 2n + 2m'' + n'') \left(\frac{n''+1}{2}\right)$, ou, en substituant pour n & n' leurs valeurs trouvées ci-dessus, $G = mm' + pm' + p'm - m - m' + m'' + p - p' + p'' + 1 - (p + p' - p'' + m + m' - m'' - n'' - 2) n''$, quantité qui est indéterminée jusqu'ici, puisque rien encore n'a déterminé n''.

Il y a donc une infinité de manières de parvenir à l'équation en y & z; mais entre toutes ces manières, il eſt évident qu'il faut s'arrêter à celle qui donnera pour G la plus petite quantité ; c'eſt-là la condition par laquelle on doit déterminer n'' ; il faut donc prendre la différentielle de G en regardant n'' ſeulement comme variable, & égaler cette différentielle à zéro ; cette condition donnera . . . .

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + p + p' + p''}{2} - m'' - p'' - 1.$$

Sur quoi il faut obſerver maintenant qu'il ne ſera pas toujours poſſible de profiter du *minimum* abſolu ; 1.° parce que n'' doit être une quantité poſitive ; 2.° parce que . . . . $\frac{m + m' + m'' + p + p' + p''}{2}$, ne peut pas toujours faire un nombre entier ; 3.° parce que $m + n$ doit être plus grand que $m'' + n''$, ou tout au plus lui être égal ; 4.° parce que m' étant ſuppoſé plus petit que m ou $= m$, il faut que $m' - 2$ ſoit plus grand que n'' ou tout au plus $= n''$, c'eſt pourquoi, pour plus de généralité, nous prendrons . . . .

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + p + p' + p'' - \alpha}{2} - m'' - p'' - 1,$$

α, étant la plus petite quantité qui puiſſe ſatisfaire à ces conditions.

Au reſte, quand même on ne trouveroit pas pour α un nombre qui pût remplir ces quatre conditions à la fois, il n'en faudroit pas pour cela conclure qu'on ne peut pas par la comparaiſon des trois équations, trouver une équation plus ſimple qu'on ne l'auroit par la comparaiſon de deux d'entr'elles.

Il faut remarquer que ces conditions naiſſent de la ſuppoſition que nous avons faite que $m + n = m' + n'$, que $m + n > m'' + n''$, &c.

Or il n'y a pas plus de raiſon pour ſuppoſer $m + n = m' + n'$, que pour ſuppoſer $m + n = m'' + n''$ ou $m' + n' = m'' + n''$, il conviendra donc de faire un triple examen. Si tous les trois donnent pour n, n', n'', des valeurs poſitives (en donnant toujours à α, les moindres valeurs qu'il qu'il se pourra) on choisira entre les trois résultats, les deux qui donnent la moindre valeur pour G.

Si l'on ne trouve pour n, n', n'', des valeurs positives que de deux manières, on s'arrêtera à ces deux-là, bien entendu qu'on examinera toujours si les valeurs de G ne sont pas plus grandes que ne les donneroit la combinaison des équations deux à deux; mais cela sera extrêmement rare. Si on ne peut parvenir à avoir de valeurs positives pour n, n', n'', que d'une seule manière, alors il sera certain qu'il faudra éliminer une fois par la comparaison de deux équations. Enfin si l'on ne peut parvenir à donner à n, n', n'', des valeurs positives, qu'en rendant G plus grand qu'il ne seroit par la combinaison des équations deux à deux, on aura recours à ce dernier moyen; mais ce dernier cas, s'il peut avoir lieu, sera très-rare: par exemple, il n'aura jamais lieu tant qu'on aura $p = p' = p'' = 0$; on trouvera toujours au moins une équation plus simple que par la combinaison des équations deux à deux, excepté le cas unique où quelqu'une des quantités m, m', m'', seroit égale à 1, & le plus souvent on trouvera deux équations plus simples que par la comparaison des équations prises deux à deux.

Après ces remarques, revenons à la valeur de G, si on substitue dans G la valeur qu'on vient de trouver pour n'', on aura $G = mm' + mm'' + mp' + mp'' + m'm'' + m'p + m'p'' + m''p + m''p' + pp'' + p'p'' + \frac{a^2}{4} - (\frac{p + p' + p'' + m + m' + m''}{2})^2$.

Le calcul que nous venons d'exposer, suffit pour trouver les deux équations en y & z; nous allons éclaircir tout cela par des exemples.

EXEMPLES.

1.° Soient $p = p' = p'' = 0$, & $m = m' = m''$, on aura $n'' = \frac{3m - a}{2} - m - 1 = \frac{m - a - 2}{2}$, $n' = \frac{m + a - 2}{2}$, $n = \frac{m + a - 2}{2}$.

Si m est pair, on pourra toujours faire $\alpha = 0$, & la valeur de G sera $= \frac{3}{4} m^2$, plus petite, par conséquent, qu'en combinant les équations deux à deux.

On pourra encore faire $\alpha = 2$, excepté dans le cas où $m = 2$, & la valeur de G sera $\frac{3m^2}{4} + 1$, plus petite encore qu'en combinant les équations deux à deux.

Dans le cas de $m = 2$, il n'y a aucune valeur autre que zéro à prendre pour α; c'est pourquoi la seconde équation en y & z doit se tirer de la comparaison de deux des trois équations.

Si m est impair, on fera $\alpha = 1$, & on aura $G = \frac{3m^2 + 1}{4}$ plus petit que par la combinaison des équations deux à deux: or comme il n'y a pas de raison pour employer les valeurs égales de u & de n', à l'égard de deux équations plutôt qu'à l'égard de deux autres, on en fera usage en deux manières, & l'on aura les deux équations y & z chacune du degré $\frac{3m^2 + 1}{4}$; donc si on a trois équations du degré m & où x soit au degré m; lorsque m sera pair, on multipliera chacune par un polynome indéterminé du degré $\frac{m-2}{2}$, & ayant supposé, à l'aide des coëfficiens indéterminés, chaque puissance de x dans la somme des trois produits égale à zéro, on aura une équation en y & z, laquelle sera du degré $\frac{3}{4} m^2$. Pour en avoir une autre, on multipliera deux des trois équations proposées par un polynome du degré $\frac{m}{2}$, & la troisième par un polynome du degré $\frac{m-4}{2}$, & l'on obtiendra de même une nouvelle équation en y & z du degré $\frac{3}{4} m^2 + 1$.

Si au contraire m est impair, on multipliera la première

& la seconde équation, par un polynome du degré $\frac{m-1}{2}$, & la troisième par un polynome du degré $\frac{m-3}{2}$; on multipliera aussi la première & la troisième chacune par un polynome du degré $\frac{m-1}{2}$, & la seconde par un polynome du degré $\frac{m-3}{2}$, ou bien la seconde & la troisième par un polynome du degré $\frac{m-1}{2}$, & la première par un polynome du degré $\frac{m-3}{2}$, & l'on aura deux équations en y & z, chacune du degré $\frac{3m^2+1}{4}$.

Nous n'entrerons pas ici dans l'examen de quelques cas particuliers, qui exigent un certain choix dans les équations qu'on doit multiplier : cet examen trouvera sa place plus bas.

On voit, par-là, combien on s'éloigne du but quand on se borne à éliminer en prenant les équations deux à deux. Par cette méthode, l'équation finale monteroit, en général, au degré m^4, au lieu qu'en les combinant toutes à la fois, elle monte au degré $\frac{3}{4}m^2(\frac{3}{4}m^2+1)^2$ lorsque m est pair, & au degré $(\frac{3m^2+1}{4})^2$ lorsque m est impair; la table suivante fait assez sentir cette différence.

Par la première méthode..	$m=$	2...	3...	4...	5...	6...	7
	$G=$	16...	81...	256...	625...	1296...	2401
Par la seconde méthode..	$G=$	12...	49...	156...	361...	756...	1369

2.° Soient $m=6$, $m'=5$, $m''=3$, $p=4$, $p'=5$, $p''=19$, on aura $n''=\frac{-4-\alpha}{2}$, $n'=\frac{12+\alpha}{2}$, $n=\frac{10+\alpha}{2}$.

La plus petite valeur qu'on puisse donner à α, est $\alpha=-4$, & alors $G=83$; mais si on renverse l'ordre des équations,

& qu'on écrive $m = 6$, $m' = 3$, $m'' = 5$, $p = 4$, $p' = 19$, $p'' = 5$, on aura $n'' = \frac{20 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{\alpha - 12}{2}$, $n = \frac{\alpha - 18}{2}$; la plus petite valeur qu'on puisse suppofer à α eſt $\alpha = 18$, qui donne $G = 104$: renverſons encore l'ordre des équations, & écrivons $m = 5$, $m' = 3$, $m'' = 6$, $p = 5$, $p' = 19$, $p'' = 4$; nous aurons $n'' = \frac{20 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{\alpha - 14}{2}$, $n = \frac{\alpha - 18}{2}$. La plus petite valeur qu'on puiſſe ſuppoſer à α eſt encore $\alpha = 18$, & l'on trouve $G = 85$; mais cette combinaiſon ne peut avoir lieu, parce qu'elle donne $m + n < m'' + n''$, &c. Si on combinoit les équations deux à deux, on trouveroit $G = 80$, $G = 144$, $G = 125$; il faut donc, dans le cas préſent, éliminer une fois ſeulement par la comparaiſon de trois équations, & une fois par la comparaiſon de deux, on multipliera les équations indiquées par $m = 6$, $m' = 5$, $m'' = 3$, on les multipliera reſpectivement par les polynomes indiqués par $n = 3$, $n' = 4$, $n'' = 0$, & les deux équations qu'on doit comparer pour avoir la ſeconde équation en y & z, ſeront celles qui ſont indiquées par $m = 6$, $m' = 5$.

3.° Soient $m = 7$, $m' = 6$, $m'' = 5$, $p = 3$, $p' = 4$, $p'' = 2$, on aura $n'' = \frac{11 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{\alpha - 1}{2}$, $n = \frac{\alpha - 3}{2}$.

La plus petite valeur qu'on puiſſe donner à α eſt donc $\alpha = 3$; mais elle eſt inutile parce qu'elle donneroit $m + n < m'' + n''$; ſoit donc $\alpha = 5$, & on aura $G = 52$. Changeons l'ordre des équations, & poſons $m = 7$, $m' = 5$, $m'' = 6$, $p = 3$, $p' = 2$, $p'' = 4$, nous aurons $n'' = \frac{5 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{5 + \alpha}{2}$, $n = \frac{1 + \alpha}{2}$, la plus petite valeur qu'on puiſſe ſuppoſer à α eſt $\alpha = -1$; mais elle eſt inutile parce qu'elle donne $m + n < m'' + n''$; ſoit $\alpha = 1$, on aura $G = 52$, ainſi que cela doit être en effet;

puisque les multiplicateurs des équations seront les mêmes dans ce cas que dans le précédent; soit donc $\alpha = 3$, on aura $G = 54$: changeons encore l'ordre des équations, & écrivons $m = 6, m' = 5, m'' = 7, p = 4, p' = 2, p'' = 3$; nous aurons $n'' = \frac{5-\alpha}{2}$, $n' = \frac{3+\alpha}{2}$, $n = \frac{1+\alpha}{2}$; les suppositions de $\alpha = -1$, $\alpha = 1$, ne peuvent avoir lieu; soit donc $\alpha = 3$, on aura $G = 52$, ce qui ne donne rien de différent de ce qu'on a déjà trouvé; car cela donne aussi les mêmes multiplicateurs que ci-dessus & pour les mêmes équations; si on fait $\alpha = 5$, on aura $G = 56$. En combinant les équations deux à deux, on trouveroit $G = 88$, $G = 64$, $G = 62$; donc il faut éliminer deux fois par la comparaison des trois équations à la fois, & on aura deux équations, l'une du degré 52, l'autre du degré 54.

III.

Des Équations à quatre inconnues.

Soient m, m', m'', m''', les exposans de x dans les quatre équations proposées; que les coëfficiens des puissances successives aient des dimensions marquées par $p, p+1, p+2, p+3$, &c. dans la première; par $p', p'+1, p'+2$, &c. dans la seconde; par $p'', p''+1, p''+2$, &c. dans la troisième; par $p''', p'''+1, p'''+2$, &c. dans la quatrième.

Soient n, n', n'', n''', les exposans des polynomes indéterminés qui, multipliant ces équations, feroient que dans la somme des quatre produits les puissances de x s'anéantiroient.

En raisonnant de la même manière que ci-dessus, on fera $m + n = m' + n'$, $m + n + 1 = n + 1 + n' + 1 + n'' + 1 + n''' + 1$; d'où l'on tirera $n = m' - n'' - n''' - 3$, & $n' = m - n'' - n''' - 3$; il faudra aussi qu'on ait $m + n > m'' + n''$, ou tout au plus égal, & $m + n > m''' + n'''$ ou tout au plus égal.

On prouvera de même que $S = (2p - n)\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$+ (2p' - n') \left(\frac{n'+1}{2}\right) + (2p'' - 2m - 2n + 2m'' + n'') \left(\frac{n''+1}{2}\right) + (2p''' - 2m - 2n + 2m''' + n''') \left(\frac{n'''+1}{2}\right)$, & par conséquent $G = (m + n + 1) \left(\frac{m+n}{2}\right) + (2p - n) \left(\frac{n+1}{2}\right) + (2p' - n') \left(\frac{n'+1}{2}\right) + (2p'' - 2m - 2n + 2m'' + n'') \left(\frac{n''+1}{2}\right) + (2p''' - 2m - 2n + 2m''' + n''') \left(\frac{n'''+1}{2}\right)$, ou en mettant pour n & n' leurs valeurs . . . .

$$\begin{aligned} G = {} & mm' + pm' + p'm - 2m - 2p - 2m' - 2p' \\ & + m'' + p'' + m''' + p''' + 3 - n''n''' \\ & - (m + m' - m'' + p + p' - p'' - n'' - n''' - 3)\, n'' \\ & - (m + m' - m''' + p + p' - p''' - n'' - n''' - 3)\, n'''. \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit la moindre qu'il est possible, il faut égaler à zéro sa différentielle prise en faisant varier n'' seulement; puis égaler aussi à zéro la différentielle de cette même quantité prise en faisant varier n''' seulement; ces opérations faites, on aura . . . .

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + m''' + p + p' + p'' + p'''}{3} - m'' - p'' - 1.$$

$$n''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + p + p' + p'' + p'''}{3} - m''' - p''' - 1;$$

mais comme il faut que n, n', n'', n''' soient des nombres entiers positifs, & qui satisfassent aux conditions marquées ci-dessus, il faut faire généralement . . . .

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + m''' + p + p' + p'' + p''' - \alpha}{3} - m'' - p'' - 1 \;\&$$

$$n''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + p + p' + p'' + p''' - \beta}{3} - m''' - p''' - 1$$

α & β étant les plus petits nombres qui puissent satisfaire à ces conditions.

Si on substitue dans G ces valeurs de n'' & de n''', on aura après les réductions convenables . . . .

$$G = mm' + mm'' + mm''' + mp' + mp'' + mp''' + m'm'' + m'm'' + m'm''' + m'p + m'p'' + m'p''' + m''m''' + m''p + m''p' + m''p''' + m'''p + m'''p' + m'''p'' + pp'' + pp''' + p'p'' + p'p''' + p''p''' + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{9} - 3\left(\frac{m + m' + m'' + m''' + p + p' + p'' + p'''}{3}\right)^2.$$

EXEMPLES.

Soient $p = p' = p'' = p''' = 0$, $m = m' = m'' = m'''$; on aura $n''' = \frac{m - \beta - 3}{3}$, $n'' = \frac{m - \alpha - 3}{3}$, $n' = \frac{m + \alpha + \beta - 3}{3}$, $n = \frac{m + \alpha + \beta - 3}{3}$. On voit d'abord clairement que quelques valeurs positives ou négatives qu'on donne à α & à β, si m est plus petit que 3, il ne sera jamais possible de rendre n, n', n'', n''' toutes-à-la-fois positives; & en effet si $m = 2$, la combinaison des quatre équations à la fois est superflue, puisque n'y ayant que x^2 & x à faire disparoître, la combinaison de trois équations suffit; dans ce cas on combinera les équations trois à trois en deux manières, & pour avoir la troisième équation, on en combinera deux seulement.

Si $m = 3$, il n'y a qu'une seule manière d'avoir n, n', n'', n''' toutes positives, c'est en supposant $\alpha = 0$ & $\beta = 0$; on peut donc combiner les quatre équations à la fois, & cela est évident. Pour avoir les deux autres équations que doit donner l'élimination, on combinera les équations trois à trois en deux manières dont le choix se décidera par ce qui a été dit précédemment sur les équations à trois inconnues.

Mais lorsque m est plus grand que 3, il peut arriver trois cas, ou m est exactement divisible par 3, ou la division donne une unité de reste, ou elle en donne 2.

PREMIER CAS. Pour avoir dans ce cas la première équation sans x, on fera $\alpha = 0$ & $\beta = 0$; pour avoir la seconde, on fera $\alpha = 3$, $\beta = 0$; & pour la troisième $\alpha = 0$, $\beta = 3$, les valeurs correspondantes de G seront $G = \frac{2}{3} m^2$, $G = \frac{2}{3} m^2 + 1$, $G = \frac{2}{3} m^2 + 1$, d'où & de ce qui précède, il est aisé de conclure que le degré de l'équation finale sera $(\frac{1}{3} m^4 + \frac{2}{3} m^2)$ $(\frac{1}{3} m^4 + \frac{2}{3} m^2 + 1)$.

SECOND CAS. Pour avoir la première équation sans x, on fera $\alpha = 1$, $\beta = 1$; & comme en échangeant les équations, on aura un facteur différent à appliquer à la même, la seule supposition de $\alpha = 1$, $\beta = 1$ donne les trois facteurs qu'on doit appliquer à chaque équation pour avoir les trois équations sans x. Par exemple, si $m = 4$, on aura $n''' = 0$, $n'' = 0$, $n' = 1$, $n = 1$; or l'égalité des exposans m, m', &c. fait qu'il est indifférent à laquelle des quatre équations on rapporte la valeur de n ou de n', &c. on en pourra donc former trois combinaisons qui donneront chacune une équation différente. La valeur de G sera la même dans chaque cas & $= \frac{2 m^2 + 1}{3}$; d'où l'on conclura que le degré de l'équation finale sera $= (\frac{m^4 + m^2 + 1}{3})^3$.

TROISIÈME CAS. Pour avoir les trois équations, on supposera $\alpha = 2$ & $\beta = 2$, & en variant de trois manières l'application des facteurs, aux équations proposées, on aura les trois équations sans x, chacune du degré $\frac{2 m^2 + 4}{3}$; d'où l'on conclura que le degré de l'équation finale sera $(\frac{m^4 + 4 m^2 + 4}{3})$ $(\frac{m^4 + 4 m^2 + 7}{3})$.

Soient maintenant $p = 2$, $p' = 0$, $p'' = 1$, $p''' = 1$; $m = 7$, $m' = 6$, $m'' = 5$, $m''' = 4$; on aura $n''' = \frac{8 - \beta}{3}$, $n'' = \frac{5 - \alpha}{3}$, $n' = \frac{\alpha + \beta - 1}{3}$, $n = \frac{\alpha + \beta - 4}{3}$. Supposons $\beta = -1$ & $\alpha = 5$, on on aura $n''' = 3$, $n'' = 0$, $n' = 1$, $n = 0$ & $G = 26$; si on fait $\alpha = -1$, $\beta = 5$, on aura $n''' = 1$, $n'' = 2$, $n' = 1$, $n = 0$ & $G = 26$; si on fait $\beta = 2$, $\alpha = 2$, on aura $n''' = 2$, $n'' = 1$, $n' = 1$, $n = 0$ & $G = 25$; quelque changement qu'on fasse dans l'ordre des équations, on retrouvera pour G les mêmes valeurs ou de plus grandes. Il ne reste donc plus qu'à savoir si la comparaison des équations trois à trois ou deux à deux, ne donne pas quelque chose de plus simple; or si on en fait le calcul, on trouvera que les équations indiquées par $m' = 6$, $m'' = 5$, $m''' = 4$, $p' = 0$, $p'' = 1$, $p''' = 1$, donneroient $G = 24$, & que celles qui sont indiquées par $m = 7$, $m'' = 5$, $m''' = 4$, $p = 2$, $p'' = 1$, $p''' = 1$, donneroient $G = 25$; donc pour avoir les trois équations les plus simples, résultantes de l'élimination de x, on comparera les quatre équations proposées, on les comparera, dis-je, trois à la fois des deux manières qui viennent d'être indiquées, & toutes les quatre à la fois de la manière indiquée par la combinaison qui a donné $G = 25$; les combinaisons des équations deux à deux donnent toutes pour G une valeur au-dessus de celles qu'on vient d'exposer.

I V.

Des Équations à cinq inconnues.

m, m', m'', m''', m'''', étant, comme ci-devant, les exposans du degré de x dans les équations proposées, & p, p', p'', p''', p'''', marquant respectivement la dimension du premier coëfficient de ces équations, les dimensions des autres étant supposées suivre la même loi que ci-dessus, on aura en raisonnant, comme on l'a fait, pour 2, 3, 4, inconnues, $m + n = m' + n'$, $m + n + 1 = n + 1 + n' + 1 + n'' + 1 + n''' + 1 + n'''' + 1$, ce qui donne $n = m' - n'' - n''' - n'''' - 4$ & $n' = m - n'' - n''' - n'''' - 4$.

On prouvera de même que

$$G = (m + n + 1)\left(\frac{m+1}{2}\right) + (2p - n)\left(\frac{n+1}{2}\right) + (2p' - n')\left(\frac{n'+1}{2}\right)$$
$$+ (2p'' - 2m - 2n + 2m'' + n'')\left(\frac{n''+1}{2}\right)$$
$$+ (2p''' - 2m - 2n + 2m''' + n''')\left(\frac{n'''+1}{2}\right)$$
$$+ (2p'''' - 2m - 2n + 2m'''' + n'''')\left(\frac{n''''+1}{2}\right)$$
$$= mm' + pm' + p'm - 3m - 3p - 3m' - 3p' + m'' + p'' + m''' + p''' + m'''' + p'''' - n''n'''$$
$$- n''n'''' - n'''n'''' + 6 - (p + p' - p'' + m + m' - m'' - n'' - n''' - n'''' - 4)\,n'' - (p + p' - p''$$
$$+ m + m' - m''' - n'' - n''' - n'''' - 4)\,n''' - (p + p' - p'''' + m + m' - m'''' - n'' - n''' - n'''' - 4)\,n''''.$$

La condition que G soit la moindre qu'il est possible, exige qu'on égale à zéro, 1.° la différentielle de G prise en faisant varier n'' seulement; 2.° la différentielle de G prise en faisant varier n''' seulement; 3.° la différentielle de G prise en faisant varier n'''' seulement; ces trois équations donneront les trois valeurs suivantes.

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p''''}{4} - m'' - p'' - 1$$
$$n''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p''''}{4} - m''' - p''' - 1$$
$$n'''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p''''}{4} - m'''' - p'''' - 1;$$

Mais comme il faut que n'', n''', n'''', soient des nombres entiers positifs & tels que $m + n > m'' + n''$, $m + n > m''' + n'''$, $m + n > m'''' + n''''$, ou que tout au plus il y ait égalité, on fera généralement;

$$n'' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p'''' - \alpha}{4} - m'' - p'' - 1$$

$$n''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p'''' - \beta}{4} - m''' - p''' - 1$$

$$n'''' = \frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p'''' - \gamma}{4} - m'''' - p'''' - 1;$$

α, β, γ étant les plus petits nombres positifs ou négatifs qui puissent satisfaire à ces conditions.

Si on substitue dans G ces valeurs de n'', n''', n'''', on aura, après les réductions convenables,

$$\begin{aligned} G = {} & m m' + m m'' + m m''' + m m'''' + m p' + m p'' + m p''' \\ & + m p'''' + m' m'' + m' m''' + m' m'''' + m' p + m' p'' + m' p''' \\ & + m' p'''' + m'' m''' + m'' m'''' + m'' p + m'' p' + m'' p''' + m'' p'''' \\ & + m''' m'''' + m''' p + m''' p' + m''' p'' + m''' p'''' + m'''' p + m'''' p' \\ & + m'''' p'' + m'''' p''' + p p' + p p'' + p p''' + p' p'' + p' p''' \\ & + p' p'''' + p'' p''' + p'' p'''' + p''' p'''' \\ & + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}{16} \\ & - 6 \left(\frac{m + m' + m'' + m''' + m'''' + p + p' + p'' + p''' + p''''}{4} \right)^2. \end{aligned}$$

EXEMPLE.

Soient $p = p' = p'' = p''' = p'''' = 0$, $m = m' = m'' = m''' = m''''$, on aura $n'''' = \frac{m - \gamma - 4}{4}$, $n''' = \frac{m - \beta - 4}{4}$, $n'' = \frac{m - \alpha - 4}{4}$, $n' = \frac{m + \alpha + \beta + \gamma - 4}{4}$, $n = \frac{m + \alpha + \beta + \gamma - 4}{4}$.

Donc si m est plus petit que 4, il n'y aura aucune valeur à donner à α, β, γ, qui puisse rendre n, n', n'', n''', n'''', toutes positives; c'est-à-dire qu'il faudra éliminer par les règles établies précédemment pour un moindre nombre d'inconnues.

Si $m = 4$, il sera possible d'éliminer par la comparaison des cinq équations à la fois; mais d'une seule manière, en faisant $\alpha = \beta = \lambda = 0$.

Si m est plus grand que 4, alors il peut arriver quatre cas, ou m est exactement divisible par 4; ou divisé par 4, il donne pour reste 1; ou divisé par 4 il reste 2; ou enfin il reste 3.

PREMIER CAS. On supposera $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, pour avoir une première équation sans x; pour avoir la seconde, on fera $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 4$; pour avoir la troisième, on fera $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $\gamma = 0$; & enfin pour avoir la quatrième, on fera $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Les valeurs correspondantes de G seront

$$G = \frac{5}{8}m^2,\ G = \frac{5}{8}m^2 + 1,\ G = \frac{5}{8}m^2 + 1,\ G = \frac{5}{8}m^2 + 1,$$

d'où il est facile de conclure quel sera le degré de l'équation finale.

SECOND CAS. On fera $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, & comme les valeurs qui en résultent pour n, n', &c. ne sont pas toutes du même degré, on en variera l'application aux cinq équations en quatre manières, ce qui donnera les quatre équations cherchées, qui seront chacune du degré $G = \frac{5m^2 + 3}{8}$.

TROISIÈME CAS. On fera $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, & on se conduira comme dans le second cas, pour avoir les quatre équations sans x qui monteront chacune au degré $\frac{5m^2}{8} + \frac{3}{2}$.

QUATRIÈME CAS. On fera $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$, & en se comportant comme dans les deux cas précédens, on aura quatre équations chacune du degré $\frac{5}{8}m^2 + \frac{27}{8}$.

V.

Des Équations qui renferment N *inconnues.*

De tout ce qui précède, il est maintenant aisé de conclure, 1.° que si on appelle a la somme des quantités m, m', m'', &c. p, p', p'', &c. & N le nombre des équations, on aura généralement

$$n'' = \frac{a-\alpha}{N-1} - m'' - p'' - 1,\ n''' = \frac{a-\beta}{N-1} - m''' - p''' - 1,$$

$$n'''' = \frac{a-\gamma}{N-1} - m'''' - p'''' - 1,\ n''''' = \frac{a-\delta}{N-1} - m''''' - p''''' - 1;$$

& ainsi de suite; & de plus,

$$n = \frac{a+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.}{N-1} - m - p - p' - 1;$$

$$n' = \frac{a+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.}{N-1} - m' - p - p' - 1.$$

2.° Que si on nomme b la somme des carrés plus la somme des produits deux à deux des quantités α, β, γ, &c. & c la somme des produits des quantités m, m', m'', &c. p, p', p'', &c. multipliées deux à deux, mais en omettant les produits $mp, m'p', m''p''$, &c. & le produit pp' des deux quantités qui appartiennent aux équations dans lesquelles on a supposé $m+n = m'+n'$, on aura en général

$$G = c + \frac{b}{(N-1)^2} - (N-1)\frac{N-2}{2}\left(\frac{a}{N-1}\right)^2 = c + \frac{b}{(N-1)^2} - \frac{N-2}{2(N-1)}a^2$$

il nous reste maintenant à donner quelques exemples de l'élimination par cette méthode.

VI.

Procédé de la méthode pour l'élimination & Réflexions qui tendent à l'abréger.

Suivant l'énoncé de la méthode donnée ci-dessus, toutes les fois qu'on aura deux équations & deux inconnues, on parviendra à éliminer en multipliant la première par un polynome tel que $M'x^{m'-1} + N'x^{m'-2} +$ &c. m' marquant le degré de la seconde; multipliant aussi la première par un polynome tel que $Mx^{m-1} + Nx^{m-2} +$ &c. m marquant le degré de la première; ajoutant les deux produits & supposant que dans la somme, le coëfficient total de chaque puissance de x est égal à zéro; ainsi si on avoit les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} &A x^2 + B x + C = 0 \\ + &A' x^2 + B' x + C' = 0, \end{aligned}$$

on auroit, après les multiplications faites,

$$\begin{aligned} &AM\,x^3 + BM\,x^2 + CM\,x + CN = 0 \\ + &A'M'x^3 + AN\,x^2 + BN\,x + C'N' \\ &\qquad\quad + B'M'x^2 + C'M'x \\ &\qquad\quad + A'N'x^2 + B'N'x, \end{aligned}$$

& par conséquent

$$\begin{aligned} &AM + AM' = 0 \\ &BM + B'M' + AN + A'N' = 0 \\ &CM + C'M' + BN + B'N' = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad CN + C'N' = 0; \end{aligned}$$

mais comme il y a un coëfficient arbitraire, attendu que la quatrième équation a nécessairement lieu dès qu'on suppose que les trois autres ont lieu, je détermine M en le supposant $= A'$, ce qui me donne $M' = -A$, &

$$\begin{aligned} &AN + A'N' = AB' - A'B \\ &BN + B'N' = A'C - AC' \\ &CN + C'N' = 0. \end{aligned}$$

Des deux premières, je tire $N = \frac{(AB' - A'B)B' - (AC' - A'C)A'}{AB' - A'B}$,

$N' = \frac{(AC' - A'C)\,A - (AB' - A'B)\,B}{AB' - A'B}$, valeurs qui, substituées dans l'équation $CN + C'N' = 0$, donnent

$$(AB - A'B)\,B'C - (AC' - A'C)\,A'C + (AC' - A'C)\,AC' - (AB' - A'B)\,BC' = 0$$

ou $(AB' - A'B)(B'C - BC') + (AC' - A'C)^2 = 0$,

équation qu'on auroit trouvée encore plus facilement par les formules du Lemme I.

Mais lorsque le degré des équations proposées est plus élevé, le calcul, quoique facile, est néanmoins long; cette considération m'a engagé à chercher des moyens de l'abréger, en conservant néanmoins l'esprit de la méthode : voici ce que j'ai trouvé.

Soient d'abord les deux équations proposées chacune du degré m, c'est-à-dire telles qu'il suit :

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T = 0$$
$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T' = 0$$

1.° Du produit de la première, multipliée par A', retranchez le produit de la seconde multipliée par A, & vous aurez une équation du degré $m - 1$.

2.° Du produit de la première, multipliée par $A'x + B'$, retranchez le produit de la seconde multipliée par $Ax + B$, vous aurez une seconde équation du degré $m - 1$.

3.° Du produit de la première, multipliée par $A'x^2 + B'x + C'$, retranchez le produit de la seconde multipliée par $Ax^2 + Bx + C$, & vous aurez une troisième équation du degré $m - 1$. Continuez de multiplier ainsi par un polynome d'un degré successivement plus élevé d'une unité, & vous formerez m équations, chacune du degré $m - 1$. Considérez chaque puissance de x comme une inconnue, & cherchez en conséquence, par les formules du Lemme I, l'équation de condition nécessaire pour que toutes ces équations aient lieu, ce sera l'équation en y; ainsi dans le cas traité ci-dessus, les deux équations

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0,$$

donneront

$$(A'B - AB')\,x + A'C - AC' = 0$$
$$(A'C - AC')\,x + B'C - BC' = 0,$$

& la seconde forme de la 1.ère formule du Lemme I, donnera $(A'B - AB')\,(B'C - BC') - (A'C - AC')^2 = 0$, qui est la même équation que ci-dessus, mais qu'on trouve ici par une voie bien plus courte.

Soient actuellement les deux équations,

$$\begin{aligned} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D &= 0 \\ A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' &= 0, \end{aligned}$$

on en formera les trois équations ſuivantes :

$$\begin{aligned} (A'B - AB')\,x^2 + (A'C - AC')\,x + A'D - AD' &= 0 \\ (A'C - AC')\,x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')\,x + B'D - BD' &= 0 \\ (A'D - AD')\,x^2 + (B'D - BD')\,x + C'D - CD' &= 0, \end{aligned}$$

& la ſeconde forme de la 2.me formule du Lemme I, donnera

$$\left.\begin{aligned} &[(A'B - AB')(A'D - AD' + B'C - BC') - (A'C - AC')^2]\,(C'D - CD') \\ &+[(A'D - AD')(A'C - AC') - (A'B - AB')(B'D - BD)]\,(B'D - BD') \\ &+[(A'C - AC')(B'D - BD') - (A'D - AD')(A'D - AD' + B'C - BC')\,(A'D - AD')] \end{aligned}\right\} = 0,$$

équation qui, en faiſant attention que

$$(A'C - AC')\,(B'D - BD) - (A'D - AD')\,(B'C - BC') = (A'B - AB')\,(C'D - CD'),$$

ſe réduit à

$$\left.\begin{aligned} -(A'D - AD')^3 + \left.\begin{aligned} 2\,(A'B - AB')\,(C'D - CD') \\ + \ (A'C - AC)\,(B'D - BD') \end{aligned}\right\}(A'D - AD') \ \begin{aligned} &+(A'B - AB')\quad (B'C - BC')\,(C'D - CD') \\ &-(A'C - AC')^2 \times (C'D - CD') \\ &-(A'B - AB')\quad (B'D - BD')^2 \end{aligned} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Soient, pour troiſième application, les deux équations ſuivantes:

$$\begin{aligned} Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E &= 0 \\ A'x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E' &= 0; \end{aligned}$$

on en formera, par la règle ci-deſſus, les quatre autres que voici.

$$\begin{aligned} &(A'B - AB')\,x^3 + (A'C - AC')\,x^2 + (A'D - AD')\,x + A'E - AE' = 0 \\ &(A'C - AC')\,x^3 + (A'D - AD' + B'C - BC')\,x^2 + (A'E - AE' + B'D - BD')\,x + B'E - BE' = 0 \\ &(A'D - AD')\,x^3 + (A'E - AE' + B'D - BD')\,x^2 + (B'E - BE' + C'D - CD')\,x + C'E - CE' = 0 \\ &(A'E - AE')\,x^3 + (B'E - BE')\,x^2 + (C'E - CE')\,x + D'E - DE' = 0. \end{aligned}$$

La ſeconde forme de la troiſième formule du Lemme I, donnera, par la ſimple ſubſtitution, l'équation ſuivante,

$$
\begin{aligned}
&[[(A'B-AB')(A'D-A'D+B'C-BC')-(A'C-AC')^2]\times(B'E-BE'+C'D-CD')\\
&+[(A'D-AD')(A'C-AC')-(A'B-AB')(A'E-AE'+B'D-BD')](A'E-AE'+B'D-BD')\\
&+[(A'C-AC')(A'E-AE'-B'D-BD')-(A'D-AD')(A'D-AD'+B'C-BC')](A'D-AD')]]\\
&\times(D'E-DE')+[[(A'C-AC')^2-(A'B-AB')(A'D-AD'+B'C-BC')](C'E-CE')\\
&+[(A'B-AB')(B'E-BE')-(A'C-AC')(A'E-AE')](A'E-AE'+B'D-BD')\\
&+[(A'E-AE')(A'D-AD'+B'C-BC')-(A'C-AC')(B'E-BE')](A'D-AD')]]\\
&\times(C'E-CE')+[[(A'E-AE')(A'C-AC')-(A'B-AB')(B'E-BE')](B'E-BE'+C'D-CD')\\
&+[(A'B-AB')(A'E-AE'+B'D-BD')-(A'C-AC')A'D-AD')](C'E-CE')\\
&+[(A'D-AD')(B'E-BE')-(A'E-AE')(A'E-AE'+B'D-BD')](A'D-AD')\\
&\times(B'E-BE')+[[(A'C-AC')(B'E-BE')-(A'E-AE')(A'D-AD'+B'C-BC')](B'E-BE'+C'D-CD')\\
&+[(A'E-AE')(A'E-AE'+B'D-BD')-(A'D-AD')(B'E-BE')](A'E-AE'+B'D-BD')\\
&+[(A'D-AD')(A'D-AD'+B'C-BC')-(A'C-AC')(A'E-AE'+B'D-BD')](C'E-CE')]]\\
&\times(A'E-AE')=0,
\end{aligned}
$$

équation qu'on réduira facilement à l'équation *(M)* suivante, en faisant attention

1.° que $(A'C-AC')(B'D-BD')-(A'D-AD')(B'C-BC')=(A'B-AB')\times(C'D-CD')$.

2.° que $(A'E-AE')(B'C-BC')-(A'C-AC')(B'E-BE')=-(A'B-AB')(C'E-CE')$.

3.° que $(A'D-AD')(B'E-BE')-(A'E-AE')(B'D-BD')=(A'B-AB')(D'E-DE')$.

4.° que $(C'D-CD')(B'E-BE')-(B'D-BD')(C'E-CE')=-(B'C-BC')(D'E-DE')$.

$$
(M)\ldots\quad (A'E-AE')^4\left.\begin{array}{l}
-3(A'B-AB')(D'E-DE')\\
-2(A'C-AC')(C'E-CE')\\
-(A'D-AD')(B'E-BE')\\
-(A'D-AD')(C'D-CD')
\end{array}\right\}(A'E-AE')^2
\left.\begin{array}{l}
+3(A'B-AB')(B'E-BE')(C'E-CE')\\
-3(A'B-AB')(B'D-BD')(D'E-DE')\\
+2(A'D-AD')^2(C'E-CE')\\
+(A'C-AC')(B'E-BE')^2\\
+2(A'C-AC')(A'D-AD')(D'E-DE')\\
-(A'C-AC)(B'C-BC')(D'E-DE')
\end{array}\right\}(A'E-AE')=0.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+2(A'B-AB')(A'D-AD')(B'E-BE')\\
-(A'D-AD')^3-(A'B-AB')(B'D-BD')^2\\
+2(A'B-AB')(A'D-AD')(C'D-CD')\\
-(C'D-CD')(A'C-AC')^2\\
-(B'E-BE')(A'C-AC')^2\\
+(A'C-AC')(A'D-AD')(B'D-BD')\\
+(A'B-AB')(B'C-BC')(B'E-BE')\\
\pm(A'B-AB')(B'C-BC')(C'D-CD')
\end{array}\right\}(D'E-DE')
\left.\begin{array}{l}
+(A'C-AC')^2(C'E-CE')\\
-2(A'B-AB')(A'D-AD')(C'E-CE')\\
-(A'B-AB')(B'C-BC')(C'E-CE')\\
+2(A'B-AB')(B'E-BE')(B'D-BD')\\
-(A'C-AC')(A'D-AD')(B'E-BE')
\end{array}\right\}(C'E-CE)=0.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-A'B-AB')(B'E-BE'\\
-A'B-AB')(C'D-CD'
\end{array}\right\}(B'E-BE')^2
$$

ce qui peut servir à éliminer dans toutes les équations qui ne passeront pas le quatrième degré.

Si les deux équations ne sont pas au même degré, on s'y prendra de la manière suivante.

$$\text{Soient}\begin{cases} Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \ldots T = 0 \\ A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + C'x^{m'-2} + D'x^{m'-3} + E'x^{m'-4} + \ldots T' = 0 \end{cases}$$

les deux équations proposées, & soit m' plus petit que m.

1.° On multipliera la première par A', & la seconde par $Ax^{m-m'}$, & on retranchera le second produit du premier.

2.° On multipliera la première par $A'x + B'$, & la seconde par $Ax^{m-m'+1} + Bx^{m-m'}$, & on retranchera le second produit du premier.

3.° On multipliera la première par $A'x^2 + B'x + C'$, & la seconde par $Ax^{m-m'+2} + Bx^{m-m'+1} + Cx^{m-m'}$, & on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait m', équations qui seront chacune du degré $m - 1$; alors on multipliera chacune de ces équations par un coëfficient indéterminé, & l'équation $A'x^{m'} +$, &c. par le polynome indéterminé $M'x^{m-m'-1} + N'x^{m-m'-2} + P'x^{m-m'-3} +$, &c. on ajoutera ensemble tous ces produits, & on égalera à zéro la somme des coëfficiens de chaque puissance de x.

Ainsi si les deux équations sont,

$$\begin{aligned} Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E &= 0, \\ A'x^2 + B'x + C' &= 0, \end{aligned}$$

on en formera d'abord les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} &(A'B - AB')x^3 + (A'C - AC')x^2 + A'Dx + A'E = 0, \\ &(A'C - AC')x^3 + (A'D + B'C - BC')x^2 + (A'E + B'D)x + B'E = 0; \end{aligned}$$

à ces deux équations multipliées, la première par M, la seconde par M'', on ajoutera l'équation $A'x^2 + B'x + C'$ multipliée par $M'x + N'$, ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} &M(A'B - AB')x^3 + M(A'C - AC')x^2 + MA'Dx + MA'E \\ &+ M''(A'C - AC')x^3 + M''(A'D + B'C - BC')x^2 + M''(A'E + B'D)x + M''B'E \\ &+ A'M'x^3 \qquad + B'M'x^2 + C'M'x + C'N' \\ &\qquad\qquad + A'N'x^2 + B'N'x \end{aligned}\right\} = 0;$$

d'où l'on tirera

$$M\,(A'B - AB') + M''\,(A'C - AC') + A'M' = 0,$$
$$M\,(A'C - AC') + M''\,(A'D + B'C - BC') + B'M' + A'N' = 0,$$
$$M\,A'D + M''\,(A'E + BD') + M'C' + B'N' = 0,$$
$$M\,A'E + M''B'E + C'N' = 0;$$

& en comparant avec les formules du Lemme I, on aura facilement l'équation sans x.

Mais quoique le calcul se réduise par ces formules à des substitutions faciles; & que la construction de ces formules soit aussi très-facile, néanmoins on perd dans le cas présent une partie de l'avantage qu'elles offrent en ce qu'on est obligé de former, sinon une formule aussi générale que si les deux équations étoient toutes deux du degré m, du moins un grand nombre de termes inutiles.

Il est vrai cependant qu'avec de l'usage dans le calcul, on prévoit assez quels sont ceux qu'on doit omettre; mais cela exige une attention assez fatigante. Pour remédier à cet inconvénient, voici ce que j'ai imaginé; on formera toujours, comme il vient d'être dit, les m' équations du degré $m - 1$; mais au lieu de multiplier l'équation $A'x^{m'} +$, &c. par le polynome indéterminé $M'x^{m - m' - 1} +$, &c. on prendra dans cette équation la valeur de $x^{m'}$, avec laquelle on formera, en multipliant successivement par x, & substituant à mesure la valeur de $x^{m'}$, toutes les puissances de x supérieures à $x^{m'}$ jusqu'à x^{m-1}; on substituera ces valeurs dans chacune des m' équations, & on n'aura plus que m' équations chacune du degré $m' - 1$, desquelles on chassera x par les formules du Lemme I.

Mais pour abréger le calcul, on substituera les valeurs de $x^{m'}$ & des puissances plus élevées, non pas dans les équations mêmes du degré $m - 1$ qu'on aura formées, mais dans des équations de pareil degré, & où les coëfficiens seront d'une seule lettre, & après avoir éliminé x, comme il vient d'être dit, on substituera, à la place de ces coëfficiens, leur véritable valeur.

Ainsi dans les deux équations proposées ci-dessus,

$$A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0,$$
$$A' x^2 + B' x + C' = 0,$$

on aura $x^2 = \dfrac{-B'x - C'}{A'}$ & $x^3 = \dfrac{\begin{matrix} B'B'x \\ -A'C'x \end{matrix} + B'C'}{A'A'}$;

au lieu de substituer ces valeurs dans

$$(A'B - AB')x^3 + (A'C - AC')x^2 + A'Dx + A'E = 0,$$

& dans

$$(A'C - AC')x^3 + (A'D + B'C - BC')x^2 + (A'E + BD')x + B'E = 0,$$

je les substitue dans

$$ax^3 + bx + cx + d = 0 \;\&\; a''x^3 + b''x^2 + C''x + d'' = 0,$$

ce qui me donne les deux équations suivantes

$$(aB'B' - aA'C' - bA'B' + c'A'A')x + aB'C' - bA'C' + dA'A' = 0$$
$$(a''B'B' - a''A'C' - b''A'B' + C''A'A')x + a''B'C' - b''A'C' + d''A'A' = 0,$$

d'où l'on tire,

$$(aB'C' - bA'C' + dA'A')(a''B'B' - a''A'C' - b''A'B' + c''A'A')$$
$$-(a''B'C' - b''A'C' + d''A'A')(aB'B' - aA'C' - bA'B' + cA'A') = 0$$

équation dans laquelle on ne prendra pas la peine de former successivement les deux produits, parce qu'il est évident que le produit des deux derniers facteurs se tire de celui des deux premiers par le seul changement des signes, & de a'' en a, de a en a'', de b'' en b, de b en b'', de c'' en c, de c en c'', & ainsi de suite : d'ailleurs on peut omettre dans le produit des deux premiers facteurs tous les termes qui n'auroient point $A'A'$ pour facteur, parce que nous allons démontrer dans un moment, que l'équation résultante est toujours divisible par une puissance de A' qui, dans le cas présent, est A'^2. D'après ces réflexions, on réduira aisément l'équation qu'on vient de trouver, à cette autre, après avoir divisé par $A'A'$,

$$(c''d - cd'')A'A' - (b''d - bd'')A'B' - (a''d - ad'')(A'C' - B'B')$$
$$+ (b''c - bc'')A'C' + (a''b - ab'')C'C' - (a''c - ac'')B'C' = 0,$$

équation dans laquelle il n'y a plus qu'à mettre pour a, b, c, &c. a'', b'', &c. leurs valeurs trouvées ci-dessus.

Il se présente, contre cette méthode, une difficulté qui, quoique plus apparente que réelle, mérite cependant d'autant plus d'être levée, que sa solution même sert à connoître les termes qu'on peut se dispenser d'omettre dans le calcul; pour la mieux faire sentir, prenons un exemple : Soient

$$Ax^9 + Bx^8 + Cx^7 + Dx^6 + Ex^5 + Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Kx + L = 0$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0,$$

on aura d'abord trois équations de la forme suivante,

$$a\,x^8 + b\,x^7 + c\,x^6 + d\,x^5 + e\,x^4 + f\,x^3 + g\,x^2 + h\,x + k = 0$$
$$a''x^8 + b''x^7 + c''x^6 + d''x^5 + e''x^4 + f''x^3 + g''x^2 + h''x + k'' = 0$$
$$a'''x^8 + b'''x^7 + c'''x^6 + d'''x^5 + e'''x^4 + f'''x^3 + g'''x^2 + h'''x + k''' = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dans lesquelles } a,\ b,\ c,\ \text{\&c. seront de } p+p'+1, p+p'+2, \text{\&c.}\\ \quad a'',\ b'',\ c'', \text{\&c. seront de } p+p'+2, p+p'+3, \text{\&c.}\\ \quad a''',\ b''',\ c''', \text{\&c. seront de } p+p'+3, p+p'+4, \text{\&c.}\\ \quad p\ \text{\&}\ p'\ \text{marquant les dimensions de } A\ \text{\&}\ A'\end{array}\right\}\text{dimensions.}$$

Concevons qu'on substitue pour x^3 sa valeur $\frac{-B'x^2 - C'x - D'}{A'}$, il est facile de voir que la valeur de x^8 aura pour dénominateur A'^6. Donc quand on aura fait toutes les substitutions dans les trois équations du 8.^{me} degré, & qu'on aura fait disparoître les fractions, le dernier terme des trois nouvelles équations sera de $p + p' + 9 + 6p'$ dimensions pour la première; de $p + p' + 10 + 6p'$ pour la seconde; de $p + p' + 11 + 6p'$ pour la troisième, & par conséquent les coëfficiens de x^2, x, x^0, auront successivement,

$$\left.\begin{array}{llll}\text{Pour la 1.}^{re} & p+7p'+7, & p+7p'+8, & p+7p'+9\\ \text{Pour la 2.}^{me} & p+7p'+8, & p+7p'+9, & p+7p'+10\\ \text{Pour la 3.}^{me} & p+7p'+9, & p+7p'+10, & p+7p'+11\end{array}\right\}\text{dimensions}$$

Donc le degré de l'équation sans x, sera $3p + 21p' + 27$; mais suivant la première méthode, il ne devroit être que

$3p + 9p' + 27$; donc la nouvelle méthode donne une équation plus élevée qu'il ne faut, de $12p'$ dimensions, & à proportion dans le degré plus élevé; mais cet inconvénient qui seroit très-réel, si le diviseur de 12 dimensions que l'équation finale renferme alors étoit complexe, disparoît totalement quand ce diviseur est monome, & il est tel en effet dans le cas présent. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que la nouvelle méthode donne le même résultat littéral, quel que soit p'; donc l'équation finale doit avoir le même diviseur littéral quand p' est zéro, que quand il ne l'est pas; or quand p' est zéro, l'équation finale est à son véritable degré, puisqu'elle est alors du degré $3p + 27$; donc le diviseur qu'elle peut avoir, & qu'elle a en effet, ne peut être qu'une puissance de A', puisqu'il n'y a que A' qui soit de zéro dimensions; donc puisque ce diviseur doit être le même dans tous les cas, on en doit conclure que l'équation finale dans le cas présent sera divisible par A'^{12}.

On prouvera de même que, dans l'exemple que nous avons traité ci-dessus, l'équation devoit être divisible par A'^2 comme nous l'y avons supposé, & comme le calcul le prouve en effet, & en général que l'équation finale sera divisible par $A'^{(m-m')(m'-1)}$, ce qui se déduit, tant de ce qui vient d'être dit, que du Lemme II.

Cette remarque peut être utile pour abréger encore le calcul, parce que dès qu'on sait que l'équation finale doit être divisible par $A'^{(m-m')(m'-1)}$, on est en droit de rejeter, dans les multiplications par lesquelles on parvient à l'équation finale, tous les termes dans lesquels on prévoit que A' aura à la fin un exposant moindre que $A'^{(m-m')(m'-1)}$. Quand $m = m'$, on voit qu'alors il n'y a aucun diviseur, & que par conséquent la méthode exposée pour ce cas, mène directement au résultat le plus simple.

Le calcul que nous avons fait ci-dessus pour éliminer x de deux équations, l'une du quatrième, l'autre du second degré, est devenu beaucoup plus facile qu'il n'y avoit lieu de l'espérer, par la remarque que nous avons faite qu'après avoir formé le produit des deux premiers facteurs, on trouveroit tout de suite le produit des deux autres, en échangeant seulement les lettres de la première & de la seconde équation dans lesquelles on avoit substitué. Cet avantage ne se borne pas au cas où l'une des deux équations proposées monteroit au second degré; mais pour mieux faire sentir en quoi il consiste dans chaque cas, prenons encore un exemple.

Soient donc $A x^5 + B x^4 + C x^3 + D x^2 + E x + F = 0$
& $A' x^3 + B' x^2 + C' x + D' = 0$,

on tirera de la comparaison de ces deux équations, faite comme il a été expliqué ci-dessus, trois équations de la forme suivante;

$$f x^4 + g x^3 + h x^2 + k x + l = 0,$$
$$f' x^4 + g' x^3 + h' x^2 + k' x + l' = 0,$$
$$f'' x^4 + g'' x^3 + h'' x^2 + k'' x + l'' = 0,$$

& l'équation $A'x^3 +$ &c. donnera $x^3 = \frac{-B'x^2 - C'x - D'}{A'}$

$x^4 = \frac{B'B'x^2 + B'C'x + B'D' - A'C'x^2 - A'D'x}{A'A'}$; par conséquent en substituant, on aura les trois équations suivantes;

$$\left.\begin{array}{l} f B'B' \\ - f A'C' \\ - g A'B' \\ + h A'^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + f B'C' \\ - f A'D' \\ - g A'C' \\ + k A'^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} + f'B'D' \\ - g'A'D' \\ + l'A'A' \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} f' B'B' \\ - f'A'C' \\ - g'A'B' \\ + h'A'^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + f'B'C' \\ - f'A'D' \\ - g'A'C' \\ + k'A'^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + f'B'D' \\ - g'A'D' \\ + l'A'A' \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} f''B'B' \\ - f''A'C' \\ - g''A'B' \\ + h''A'^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + f''B'C' \\ - f''A'D' \\ - g''A'C' \\ + k''A'^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + f''B'D' \\ - g''A'D' \\ + l''A'A' \end{array}\right\} = 0.$$

Pour éliminer, il ne seroit plus question que de substituer dans la seconde formule de la seconde forme du Lemme I; mais la substitution entière n'est pas nécessaire, il suffit de la faire seulement dans le premier terme qui est $(a'b' — a'b)c''$, ce qui donnera pour premier terme de l'équation finale, la quantité suivante;

$$[(f B'B' - f A'C' - g A'B' + h A'^2)(f'B'C' - f'A'D' - g'A'C' + k'A'^2) - (f'B'B' - f'A'C' - g A'B' + h'A'^2)(f B'C' - f A'D' - g'A'C' + k'A'^2)].(f''B'D' - g''A'D' + f''A'A');$$

pour évaluer ce terme, on multipliera les deux premiers facteurs renfermés entre les doubles parenthèses, & en changeant f en f' & f' en f, g en g' & g' en g, & ainsi de suite, changeant de plus les signes, on aura le produit des deux autres facteurs renfermés entre les doubles parenthèses; on multipliera le tout par le facteur qu'affecte la double parenthèse, & dans ces multiplications, on omettra tous les termes que l'on prévoira ne devoir pas avoir à la fin A'^4 pour facteur.

Cela posé, on changera dans le produit total qu'on vient de former; 1.° tous les signes; 2.° f' en f'' & f'' en f', g' en g'' & g'' en g', & ainsi de suite, & on aura ce qu'auroit produit la substitution dans $(a''b — ab'')c'$ second terme de la formule; ensuite on changera encore dans le premier produit total f en f'' & f'' en f, g en g'' & g'' en g, &c. on changera aussi les signes, & on aura par-là, ce qu'auroit produit la substitution dans $(a'b'' — a''b')c$; la somme de ces trois résultats étant égalée à zéro, & divisée par A'^4 donnera l'équation finale, en y substituant d'ailleurs pour f, g, &c. f', g', &c. f'', g'', &c. leurs valeurs données par la méthode ci-dessus.

En voilà assez sur les équations à deux inconnues. Je n'insiste point sur l'usage qu'on peut faire de ces méthodes, pour la construction des formules d'élimination; mais la forme sous laquelle ces méthodes les donnent, me paroît très-propre à mettre sur la voie pour les former par une règle générale

qui

qui n'exige point de ſubſtitution dans aucune formule; c'eſt un travail auquel j'invite ceux qui ſeront aſſez heureux pour avoir plus de temps à dépenſer que moi.

La méthode pour les équations à trois ou à un plus grand nombre d'inconnues, peut recevoir auſſi des abréviations fondées ſur les mêmes principes; à la vérité ces abréviations introduiront un facteur, mais il ſera monome & déterminable indépendamment de l'opération. Nous nous contenterons d'expoſer ces moyens d'abréviation, en prenant pour exemple les équations à trois inconnues; cet expoſé & celui que nous avons fait à l'occaſion des équations à deux inconnues, ſuffiront, je penſe, pour faire connoître comment on doit traiter les équations à un plus grand nombre d'inconnues.

Soient donc d'abord les trois expoſans de x égaux entr'eux, on déterminera, par les moyens donnés plus haut, les valeurs de n, n' & n'' ou ſimplement les valeurs de n & n'', parce que dans le cas préſent $n = n'$.

Cela poſé, les trois équations étant

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots T = 0;$$
$$A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + D'x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots T' = 0,$$
$$A''x^n + B''x^{n-1} + C''x^{n-2} + D''x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots T'' = 0;$$

au lieu de multiplier ces équations reſpectivement par

$$Mx^n + Nx^{n-1} + \&c.$$
$$M'x^n + N'x^{n-1} + \&c.$$
$$M''x^{n''} + N''x^{n''-1} + \&c.$$

on s'y prendra de la manière ſuivante.

1.° Du produit de la première multipliée par A', on retranchera celui de la ſeconde multipliée par A.

2.° Du produit de la première multipliée par $A'x + B'$, on retranchera le produit de la ſeconde multipliée par $Ax + B$.

3.° Du produit de la 1.re multipliée par $A'x^2 + B'x + C'$, on retranchera le produit de la ſeconde multipliée par $Ax^2 + Bx + C$, & on continuera de même juſqu'à ce que le multiplicateur ſoit devenu du degré n, après quoi on comparera la première à la troiſième de la même manière, c'eſt-à-dire que:

1.° Du produit de la première multipliée par A'', on retranchera le produit de la seconde multipliée par A.

2.° Du produit de la première multipliée par $A''x + B''$, on retranchera le produit de la seconde multiplié par $Ax + B$, & ainsi de suite jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré n''.

Par ces opérations, on aura $n + n'' + 2$ équations, chacune du degré $m - 1$; & comme $n = m - n'' - 2$, on aura m équations du degré $m - 1$, c'est-à-dire autant qu'il est nécessaire pour éliminer par la simple substitution dans les formules du Lemme I, & moins qu'on n'en auroit eu, si on se fut borné à chercher les valeurs de M, N, &c. M', N', &c. M'', N'', &c. Pour connoître maintenant le diviseur monome qu'acquèrera l'équation, il faut remaquer que les dimensions des coëfficiens des termes des équations formées par la comparaison de la première & de la seconde équation proposées, seront

Pour la 1.re $p + p' + 1,\ p + p' + 2,\ p + p' + 3,\ p + p' + 4$, &c. jusqu'à $p + p' + m$

Pour la 2.de $p + p' + 2,\ p + p' + 3,\ p + p' + 4,\ p + p' + 5$, &c. jusqu'à $p + p' + m + 1$

Pour la 3.me $p + p' + 3,\ p + p' + 4,\ p + p' + 5,\ p + p' + 6$, &c. jusqu'à $p + p' + m + 2$, &c.

le nombre de ces progressions étant $n + 1$; & par la comparaison de la première & de la troisième,

$p + p'' + 1,\ p + p'' + 2,\ p + p'' + 3,\ p + p'' + 4$, jusqu'à $p + p'' + m$

$p + p'' + 2,\ p + p'' + 3,\ p + p'' + 4,\ p + p'' + 5$, jusqu'à $p + p'' + m + 1$

$p + p'' + 3,\ p + p'' + 4,\ p + p'' + 5,\ p + p'' + 6$, jusqu'à $p + p'' + m + 2$, &c.

le nombre de ces progressions étant $n'' + 1$.

Donc par le corollaire II du Lemme II, la dimension de l'équation sans x résultante de cette méthode, sera

$$(2p + 2p' + n + 2)\left(\frac{n+1}{2}\right) + (2p + 2p'' + n'' + 2)\left(\frac{n''+1}{2}\right) + (n + n'' + 2)\left(\frac{n + n'' + 1}{2}\right)$$

$$= mm - m + 1 - p' + p'' + pm + p'm - (m + p' - p'' - n'' - 2)n'',$$ en mettant pour n sa

valeur $m - n'' - 2$; or la dimenſion de l'équation ſans x ne doit être que $mm - m + 1 - p - p' + p'' + pm + p'm - (m + p + p' - p'' - n'' - 2)n''$; donc la nouvelle méthode donne un excès de $p + pn''$ dimenſions.

Or je conclus de-là que l'équation qu'elle donne eſt diviſible par $A^{1+n''}$; en effet, puiſque l'équation eſt trop élevée de $p + pn''$ dimenſions, chacun de ſes termes étant néceſſairement du même nombre de dimenſions, il faut que chaque terme ait un facteur ſuperflu de $p + pn''$ dimenſions; or je dis que ce facteur eſt le même pour chaque terme, & cela eſt évident, puiſque lorſque p ſera zéro, il doit être de zéro dimenſions, ce qui ne peut convenir qu'à A; donc ce facteur eſt généralement $A^{1+n''}$, éclairciſſons cet expoſé de la méthode par un exemple. Soient les trois équations,

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0,$$
$$A''x^3 + B''x^2 + C''x + D'' = 0,$$

& ſoient A de deux dimenſions, A' de trois, & A'' d'une dimenſion; on aura

$n'' = \frac{5 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{\alpha - 3}{2}$, $n = \frac{\alpha - 3}{2}$; la plus petite valeur qu'on puiſſe donner à α, pour que n'', n', n ſoient poſitives, & pour que $m + n$ ſoit plus grand que $m'' + n''$ eſt $\alpha = 5$; donc $n'' = 0$, $n' = 1$, $n = 1$, & par conſéquent $G = 18$.

Si on renverſe l'ordre des équations & qu'on conçoive que celle qui étoit la ſeconde eſt actuellement la dernière, & que la dernière devient la ſeconde, n, n', n'' répondant à la première, ſeconde & troiſième équation du nouvel arrangement; on aura,

$n'' = \frac{1 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{1 + \alpha}{2}$, $n = \frac{1 + \alpha}{2}$; la plus petite valeur qu'on puiſſe donner à α, eſt $\alpha = 1$, qui donne

$n'' = 0$, $n' = 1$, $n = 1$ & $G = 16$.

Renversons encore l'ordre des équations, de manière que celles qui dans le premier arrangement étoient les deux dernières, soient actuellement les deux premières, & que la première devienne la dernière; nous aurons,

$n'' = \frac{3 - \alpha}{2}$, $n' = \frac{\alpha - 1}{2}$, $n = \frac{\alpha - 1}{2}$; la plus petite valeur qu'on puisse donner à α est 3, qui donne $n'' = 0$; $n' = 1$, $n = 1$ & $G = 17$, & comme les équations proposées ne pourroient être comparées deux à deux seulement, sans donner une valeur de G au-dessus de 17, j'en conclus que pour éliminer dans le cas présent, il faudroit, suivant la première méthode, les combiner trois à trois en deux manières; la première en ajoutant le produit de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $Mx + N$, avec le produit de $A''x^3 + B''x^2 + C''x + D''$ par $M'x + N''$, & avec le produit de $A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ par M', ou simplement avec $A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$; & la seconde en ajoutant le produit de $A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ par $M'x + N'$, avec le produit de $A''x^3 + B''x^2 + C''x + D''$ par $M''x + N''$, & avec le produit de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par M. M, N, M', N', M'', N'', marquent ici des quantités différentes de celles du premier cas.

Pour parvenir au même résultat par la seconde méthode, on s'y prendra de la manière suivante.

Ayant vu qu'il faut multiplier $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $Mx + N$, $A''x^3 + B''x^2 + C''x + D''$ par $M''x + N''$, & $A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ par M' seulement; j'écris les trois équations dans l'ordre suivant;

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$
$$A''x^3 + B''x^2 + C''x + D'' = 0,$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0.$$

Du produit de la première par A'', je retranche le produit de la seconde par A, & j'ai

$$(A''B - AB'')\,x^2 + (A''C - AC'')\,x + A''D - AD'' = 0;$$

Du produit de la première par $A''x + B''$, je retranche le produit de la seconde par $Ax + B$, & j'ai

$$(A''C - AC'')\,x^2 + (A''D - AD'' + B''C - BC'')\,x + B''D - BD'' = 0.$$

Du produit de la première par A', je retranche le produit de la troisième par A, & j'ai

$$(A'B - AB')\,x^2 + (A'C - AC')\,x + A'D - AD' = 0.$$

La question est réduite à comparer ces trois équations du 2.^{me} degré à la 2.^{de} formule de la 2.^{me} forme du Lemme I, laquelle donnera

$$\left.\begin{array}{l} [(A''B - AB'')(A''D - AD'' + B''C - BC'') (A''C - AC'')^2]\,(A'D - AD') \\ + [(A'B - AB')(A''C - AC'') - (A''B - AB'')(A'C - AC')]\,(B''D - BD'') \\ + [(A''C - AC'')(A'C - AC') - (A'B - AB')(A''D - AD'' + B''C - BC'')]\,(A''D - AD''), \end{array}\right\} = 0$$

équation qui, après les opérations faites, sera divisible par $A^{1+n''}$, c'est-à-dire par A.

Pour avoir la seconde équation sans x, il n'y a autre chose à faire qu'à changer, dans celle qu'on vient de trouver, A' en A & A en A', B' en B & B en B', & ainsi de suite.

Dans les degrés pairs, ce changement ne donnera point une nouvelle équation; c'est pourquoi il faudra faire le calcul pour d'autres valeurs de n & de n'', qu'on trouvera comme il a été dit plus haut.

Soient maintenant m, m', m'' inégaux, & que m soit plus grand que m' & m' plus grand que m'', ou qu'il y ait tout au plus égalité; après avoir déterminé n, n' & n'', on procèdera comme il suit:

1.° Du produit de la première par A', on retranchera le produit de la seconde par $Ax^{m - m'}$, & on aura une première équation du degré $m - 1$.

2.° Du produit de la première par $A'x + B'$, on retranchera le produit de la seconde par $Ax^{m - m' + 1} + Bx^{m - m'}$, & on aura une seconde équation du degré $m - 1$.

3.° Du produit de la première multipliée par $A'x^2 + B'x + C'$, on retranchera le produit de la seconde multipliée par $Ax^{m-m'+2} + Bx^{m-m'+1} + Cx^{m-m'}$, & on aura une troisième équation du degré $m - 1$.

On continuera ainsi jusqu'à ce que le premier multiplicateur soit devenu du degré n.

On substituera dans chacune de ces équations, au lieu de $x^{m'}$ & ses puissances plus élevées, la valeur de $x^{m'}$, tirée de la seconde équation, & les puissances plus élevées qu'on en conclura par des multiplications & substitutions successives; par-là, on aura $n + 1$ équations chacune du degré $m' - 1$.

Ces opérations faites, si $n + 2$ est plus petit que m'', on comparera la seconde à la troisième comme on a comparé la première à la seconde, mais seulement jusqu'à ce que le multiplicateur de la seconde soit devenu du degré $m'' - n - 2$; ce qui donnera $m'' - n - 1$ équations du degré $m' - 1$, & par conséquent on aura en tout m'' équations chacune du degré $m' - 1$.

Si $n + 2$ se trouvoit plus grand que m'', on ne compareroit la première équation à la seconde que jusqu'à ce que le multiplicateur fût devenu du degré $n + 1 - m''$.

Alors on substituera, dans chacune des m'' équations du degré, $m' - 1$ au lieu de $x^{m'}$ & ses puissances supérieures, la valeur de $x^{m''}$ & de ses puissances supérieures conclues de la troisième équation, & on aura m'' équations chacune du degré $m'' - 1$, lesquelles, comparées aux formules du Lemme II, donneront l'équation sans x.

Il ne reste plus qu'à démontrer que l'équation sans x, trouvée de cette manière, ne sera pas plus élevée qu'elle ne doit être, ou du moins que le diviseur qu'elle aura sera monome : voici comment on y parvient.

Les $n + 1$ équations résultantes de la comparaison de la première équation à la seconde, faites avant la substitution de $x^{m'}$, seront telles que les dimensions successives des coëfficiens des puissances de x, seront,

$p + p' + 1$, $p + p' + 2$, $p + p' + 3$ jusqu'à $p + p' + m$
$p + p' + 2$, $p + p' + 3$, $p + p' + 4$ jusqu'à $p + p' + m + 1$
$p + p' + 3$, $p + p' + 4$, $p + p' + 5$ jusqu'à $p + p' + m + 2$, &c.
jusqu'à $n + 1$ progressions.

Et après la substitution de $x^{m'}$ les dimensions des coëfficiens seront

$p + p' + m - m' + 1 + (m - m')p'$, $p + p' + m - m' + 2 + (m - m')p'$ jusqu'à $p + p' + m + (m - m')p'$
$p + m - m' + 2 + (m - m')p'$, $p + p' + m - m' + 3 + (m - m')p'$ jusqu'à $p + p' + m + 1 + (m - m')p'$
$p + m - m' + 3 + (m - m')p'$, $p + p' + m - m' + 4 + (m - m')p'$ jusqu'à $p + p' + m + 2 + (m - m')p'$, &c.
jusqu'à $n + 1$ progressions.

Les $m'' - n - 1$ équations résultantes de la comparaison de la seconde équation à la troisième, faites avant la substitution de $x^{m''}$, auront, pour dimensions successives des puissances de x, les progressions suivantes :

$p' + p'' + 1$, $p' + p'' + 2$, $p' + p'' + 3$ jusqu'à $p' + p'' + m'$,
$p' + p'' + 2$, $p' + p'' + 3$, $p' + p'' + 4$ jusqu'à $p' + p'' + m' + 1$,
$p' + p'' + 3$, $p' + p'' + 4$, $p' + p'' + 5$ jusqu'à $p' + p'' + m' + 2$, &c.
jusqu'à un nombre de progressions $= m'' - n - 1$.

& lorsqu'on aura fait la substitution de $x^{m''}$, tant dans les $n + 1$ premières équations, que dans les $m'' - n - 1$ dernières, on aura 1.° $n + 1$ équations du degré $m'' - 1$, dont les coëfficiens des puissances de x auront successivement pour dimensions :

$p + p' + m - m'' + 1 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$, $p + p' + m - m'' + 2 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$
jusqu'à $p + p' + m + (m - m')p' + (m' - m'')p''$
$p + p' + m - m'' + 2 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$, $p + p' + m - m'' + 3 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$
jusqu'à $p + p' + m + 1 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$
$p + p' + m - m'' + 3 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$, $p + p' + m - m'' + 4 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$
jusqu'à $p + p' + m + 1 + (m - m')p' + (m' - m'')p''$, &c.
jusqu'à $n + 1$ progressions.

2.° $m'' - n - 1$ équations du degré $m'' - 1$ dont les coëfficiens des puissances de x, auront successivement pour dimensions

$p' + p'' + m' - m'' + 1 + (m' - m'')\, p''$, $p' + p'' + m' - m'' + 2 + (m' - m'')\, p''$
jusqu'à $p' + p'' + m' + (m' - m'')\, p''$

$p' + p'' + m' - m'' + 2 + (m' - m'')\, p''$, $p' + p'' + m' - m'' + 3 + (m' - m'')\, p''$
jusqu'à $p' + p'' + m' + 1 + (m' - m'')\, p''$

$p' + p'' + m' - m'' + 3 + (m' - m'')\, p''$, $p' + p'' + m' - m'' + 4 + (m' - m'')\, p''$
jusqu'à $p' + p'' + m' + 2 + (m' - m'')\, p''$, &c.
jusqu'à $m'' - n - 1$ progressions.

Donc par le Corollaire II du Lemme II, la dimension de l'équation sans x; sera,

$$[2p + 2p' + 2m - 2m'' + 2 + 2(m - m')\, p' + 2(m' - m'')\, p'' + n]\left(\frac{n+1}{2}\right) + [2p' + 2p'' + 2m' - 2m'' + 2(m' - m'')\, p'' + m'' - n]\left(\frac{m'' - n - 1}{2}\right) + m''\left(\frac{m'' - 1}{2}\right),$$

c'est-à-dire en mettant pour n sa valeur $m' - n'' - 2$,

$$G = m m' + p m' - m + m' + m'' - p + p'' + 1 - p' m + p' m' + p' m'' + p' m m' - p' m' m' - p'' m' + p'' m'' + p'' m' m'' - p'' m'' m'' - (m + m' - m'' + p - p'' - n'' - 2 + p' m - p' m')\, n'';$$

mais elle ne devroit être que

$$m m' + p m' + p' m - m - m' + m'' - p - p' + p'' + 1 - (m + m' - m'' + p + p' - p'' - n'' - 2)\, n'';$$

donc elle est trop forte de

$$p' - 2p' m + p' m' + p' m'' + p' m m' - p' m' m' - p'' m' + p'' m'' + p'' m' m'' - p'' m'' m'' - (-p' + p' m - p' m')\, n'' = p'[(m - m')(m' - n'' - 2) + n'' + 1 - m' + m''] + (m' - m'')(m'' - 1)\, p'' = p'[(m - m')\, n + m'' - n - 1] + p''(m' - m'')(m'' - 1);$$

Or je dis 1.° que le facteur superflu qui affecte chaque terme de l'équation sans x, ne peut renfermer d'autres lettres que A' & A''; en effet, la dimension de ce facteur étant $p'[(m - m')\, n + m'' - n - 1] + p''(m' - m'')(m'' - 1)$, doit être zéro qand p' & p'' seront zéro; or il n'y n'y a que A' & A'', qui ſoient généralement des dimenſions nulles dans ce cas.

2.° Je dis que ce facteur ſera monome; car lorſque p', par exemple, ſera zéro, chaque terme de l'équation n'aura plus ſon facteur ſuperflu que de $p''\ (m' - m'')\ (m'' - 1)$ dimenſions; or il eſt facile de voir que ce facteur doit être commun à tous les termes; donc il le ſera auſſi lorſque p' ne ſera pas zéro, & comme le raiſonnement eſt le même de p'' comparé à p' que de p' à p''; il s'enſuit donc que le facteur entier ſuperflu eſt commun à tous les termes de l'équation, & qu'il ne peut être qu'une puiſſance de A' multipliée par une puiſſance de A'', c'eſt-à-dire qu'il ne peut-être que

$$A'^{(m - m')n + m'' - n - 1} A''^{(m' - m'')(m'' - 1)}.$$

Nous ne pouſſerons pas plus loin ces recherches ſur les moyens d'abréger le calcul de l'élimination: ce que nous en avons dit ſuffit pour faire connoître ce qu'on aura à faire quand le nombre des équations ſera plus grand.

Au reſte, je crois ces méthodes encore très-ſuſceptibles de perfection, & il y a un grand nombre de cas où en ſuivant les principes ſur leſquels elles ſont fondées, on parvient à trouver des routes plus faciles; mon objet ne devant pas être dans ce Mémoire d'entrer dans ces détails, je me borne à en avertir.

La recherche de la dimenſion que doit avoir l'équation réſultante de l'évanouiſſement, eſt utile, comme on a pu le voir dans ce Mémoire, en ce qu'elle ſert à juger ſi une méthode qu'on ſe propoſeroit d'employer pour éliminer, convient à ce but ou non, en apprenant ſi l'équation à laquelle cette méthode conduira, ſera ou ne ſera pas d'un nombre de dimenſions ſupérieur à ce qu'il doit être, & même ſi le facteur ſuperflu doit être monome ou complexe.

On peut encore appliquer à beaucoup d'autres uſages cette manière de combiner les équations, particulièrement à la recherche du commun diviſeur de pluſieurs quantités complexes. En effet, ſi deux, trois ou un plus grand nombre de quantités complexes ont un diviſeur commun compoſé, par exemple, de x, & de telles autres quantités qu'on voudra, on peut ſuppoſer que chacune de ces quantités eſt zéro, parce qu'elle le deviendroit en effet, ſi on mettoit pour x ſa valeur qu'on auroit en égalant ce diviſeur à zéro : alors ou le diviſeur eſt d'une, ou de deux ou d'un plus grand nombre de dimenſions ; il n'y a donc qu'à chercher quels ſont les polinomes indéterminés par leſquels il faudroit multiplier chaque équation pour qu'en égalant à zéro la ſomme des produits, il n'y reſtât que les deux derniers termes, ſi le commun diviſeur doit être d'une dimenſion, ou les trois derniers, s'il doit être de deux dimenſions, & ainſi de ſuite. Je me contente d'indiquer cet uſage.