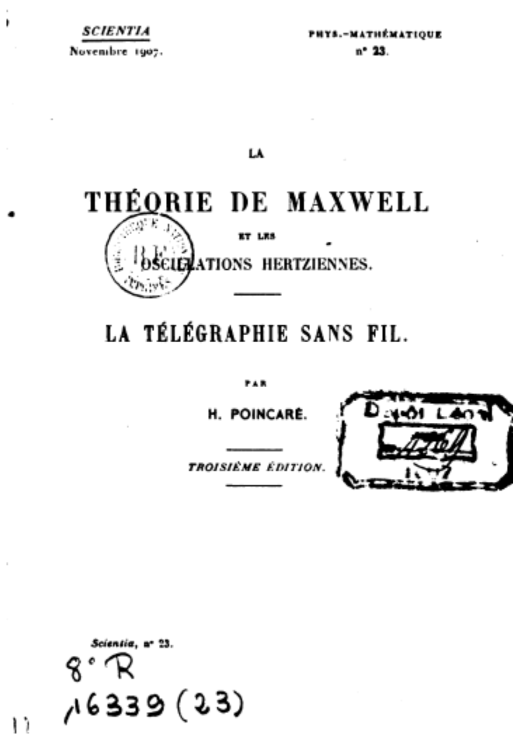
Les conférences « oubliées » d'Henri Poincaré : les cycles limites de 1908

Jean-Marc Ginoux
Maître de conférences en Mathématiques Appliquées[1]
Docteur en histoire des sciences

Henri Poincaré (1854-1912), qui s'était déjà illustré en 1893 en proposant une solution à l'équation des télégraphistes, était très impliqué dans les développements de la T.S.F. En 1908, le mathématicien-physicien a publié de nombreux articles dans ce domaine (Poincaré [1902a, 1902b, 1907]) ainsi qu'un ouvrage intitulé *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil*[2] est publié en 1904 puis traduit en anglais et en allemand ; il constitue, d'après Blondel [1912, p. 100], le « premier exposé vraiment scientifique » sur le sujet.


SCIENTIA
Novembre 1907.

PHYS.-MATHÉMATIQUE
n° 23.

LA
THÉORIE DE MAXWELL
ET LES
OSCILLATIONS HERTZIENNES.

LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL.

PAR
H. POINCARÉ.

TROISIÈME ÉDITION.

Scientia, n° 23.

***Figure 1:** L'ouvrage d'Henri Poincaré susmentionné, édition Scientia 1907.*

1. Département de Génie Mécanique et Productique de l'I.U.T. de Toulon, ginoux@univ-tln.fr ; http://ginoux.univ-tln.fr
2. La première édition en 1899 ne contenait pas la T.S.F. et s'intitulait simplement « La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes ». Il sera édité en 1904 en Anglais (« Maxwell's theory and Wireless Telegraphy ») et réédité en 1907 (en français) (http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/pdf/hp1907tm.pdf Université de Nancy, édition de 1907)

Comme dans tous les domaines qu'il a abordés, Poincaré est une autorité unanimement reconnue, comme en attestent les rapports qu'il entretient avec les deux spécialistes de la T.S.F. en France que sont Gustave Ferrié et Camille Tissot, ainsi que sa présence dans bon nombre de comités scientifiques comme celui de la revue *La Lumière Électrique*. Ce n'est donc pas un hasard s'il est nommé président du Conseil de perfectionnement de l'École Supérieure des Postes et Télégraphes en 1901. Le directeur, Édouard Estaunié (1862-1942), joue même cette carte pour redorer le blason de l'École, ce qui dépassera toutes ses espérances[3].

***Figure 2* : l'officier de marine Camille Tissot (1868-1917).** *C'est en qualité de professeur de physique à l'École navale de Brest (à partir de 1891) qu'il se consacre à l'étude des oscillations électriques et de leur application dans le domaine maritime. Pionnier de la télégraphie sans fil et de son application à la communication maritime, il établit en 1898 la première liaison radio depuis un navire. Il fait une thèse de doctorat sur la résonance des antennes en 1905 – Poincaré en est un des examinateurs, et interlocuteur régulier de Tissot sur ces sujets.*

3. D'après Atten *et al.* [1999, p. 50] « Si le semestre que Henri Poincaré consacre, tous les deux ans, à des sujets particulièrement difficiles, attire nombre d'auditeurs, il n'est sans doute pas d'un intérêt immédiat pour les ingénieurs des P. et T. Mais la venue de ce physicien-mathématicien de renommée mondiale donne un éclat nouveau à l'École et c'est le but recherché par E. Estaunié : « Quand...je dus réorganiser celle-ci [l'École], il me parut qu'en recourant à Poincaré, j'avais toutes les chances de réussir mon entreprise... Il accepta de faire gratis un cours sur ... une question d'électricité à notre choix et n'ayant encore jamais été traitée... Je dois dire que la seule annonce de cette collaboration nous valut la venue de nombreux étrangers, tant étaient grands la réputation du maître et l'attrait d'un tel programme. » » Estaunié joue de ses relations pour faire inviter d'autres scientifiques de renom comme Pierre Curie (1859-1906).

Les avantages de la T.S.F. par rapport à la télégraphie optique

Dans l'édition de 1907 de son ouvrage (*cf*. figure 1 et NbdP2), Poincaré expose p.90 de manière fort pédagogique les avantages de la télégraphie radio sans fil par rapport à la télégraphie optique (signaux lumineux) utilisée jusque là.

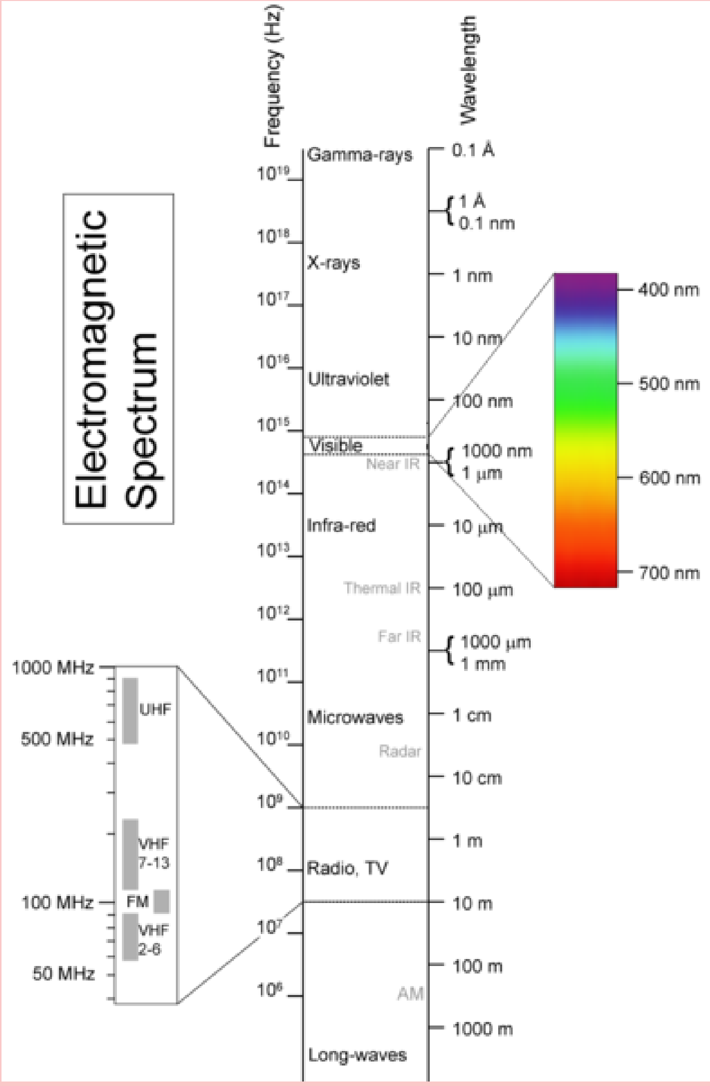


*__Figure 3 :__ **Rappel sur le spectre électromagnétique.** Détaillé à droite, le spectre visible, à longueur d'onde entre 400 et 700 nanomètres. Détaillé à gauche, le spectre radio, à longueur d'onde entre 50 cm et 10m (on parle plutôt pour les ondes radio de leur fréquence, inversement proportionnelle à la longueur d'onde). Image Wikicommons.*

Ces avantages présentés par Poincaré sont les suivants :

- longueur de parcours : « la longueur d'onde [du signal hertzien] étant plus grande [que celle du signal lumineux], la diffraction devient notable ; d'où la possibilité de contourner les obstacles. L'obstacle le plus important est celui qui est dû à la rotondité même du globe ». Ainsi, en télégraphie optique, on pouvait aller jusqu'à 50 km en choisissant des points hauts ; « avec la télégraphie sans fil, on ira à 300 km ».

- le signal hertzien n'est pas arrêté par le brouillard, pour la même raison que précédemment : la lumière « est dissipée par les réflexions multiples qu'elle subit à la surface des nombreuses vésicules du brouillard (…) pour que ces réflexions se produisent, il faut que les dimensions de ces vésicules soient grandes par rapport à une longueur d'onde ». Poincaré explique : « Cette transmission facile de la lumière hertzienne à travers le brouillard est une propriété précieuse, et l'on a proposé de s'en servir pour éviter les collisions en mer ».
- communication vers des postes mobiles : la communication d'un poste fixe vers un mobile est difficile avec un signal lumineux, quand on ne connaît pas la position du mobile. Pour le signal hertzien, le réglage directionnel est « long et délicat », de sorte qu' « on ne peut guère communiquer qu'entre postes fixes[4] » ; au contraire, « des ondes hertziennes envoyées indifféremment dans toutes les directions permettront de communiquer avec un poste mobile, quand même la position n'en serait pas connue. D'où l'importance du nouveau système pour la marine ».

Poincaré souligne toutefois un inconvénient inhérent à ce dernier avantage, en temps de guerre notamment. L'ennemi peut difficilement capter un signal lumineux, directionnel et à haute altitude. « Les ondes hertziennes sont, au contraire, envoyées dans toutes les directions ; elles peuvent donc impressionner [*atteindre*] les cohéreurs [*récepteurs*] ennemis aussi bien que les cohéreurs amis et, pour le secret, on ne peut plus se fier qu'à son chiffre. De plus, l'ennemi peut troubler les communications en envoyant des signaux incohérents qui viendront se confondre avec les signaux émis par la station amie ».

@@@@@@@

Les conférences de Poincaré à l'École des postes et télégraphes aborderont des thèmes variés :

- Propagation de courants variables sur une ligne munie d'un récepteur,
- Théorie mathématique de l'appareil téléphonique,
- La T.S.F. et la diffraction des ondes le long de la courbure de la Terre
- La T.S.F. et la méthode théorique de Fredholm,
- La dynamique de l'électron et le principe de relativité.

4. C'est en quelque sorte une définition des « faisceaux hertziens », largement à l'œuvre de nos jours, notamment dans les réseaux de téléphonie mobile, qui est donnée ici par Poincaré…

Les conférences données par Poincaré en mai-juin[5] 1908 sont éditées dans une série de cinq numéros de la revue *La Lumière Électrique*, alors considérée comme une référence en matière d'électrotechnique et de télégraphie. À l'auditoire des conférences viennent s'ajouter les lecteurs de la revue, touchant ainsi un assez large public. La série publiée aborde, par ordre chronologique, les sujets suivants :

- Samedi 28 novembre 1908 (p. 257) : L'émission d'ondes et l'amortissement ;
- Samedi 5 décembre 1908 (p. 299) : Étude du champ dans le voisinage de l'antenne ;
- Samedi 12 décembre 1908 (p. 321) : Transmission des ondes et la diffraction ;
- Samedi 19 décembre 1908 (p. 353) : La réception des signaux ;
- Samedi 26 décembre 1908 (p. 385) : Télégraphie dirigée. Oscillations entretenues[6].

Notons que chaque conférence est publiée en tête de la livraison hebdomadaire. L'éditorial de la revue reprend le contenu et les conclusions essentielles :

> *Dans ces conférences, l'auteur se défend de vouloir faire une théorie complète de la Télégraphie sans fil, mais son intention est simplement d'exposer quelques théories mathématiques, susceptibles de faciliter l'intelligence de ces phénomènes*. [Poincaré 1908, p. 257]

Il faut ajouter que ces conférences comportent à la fois une revue des connaissances expérimentales et théoriques acquises dans ce domaine et des éléments originaux produits par Poincaré lui-même. Le meilleur exemple en est la question des ondes entretenues, sujet de la dernière conférence. L'éditorial indique :

> *Il passe ensuite à l'étude des oscillations entretenues, établit quatre équations générales, dont une différentielle qui lui permet de déterminer la condition de stabilité du régime et aussi les conditions de possibilité du problème. Au point de vue pratique, le seul fait d'avoir un arc dans le circuit du courant rend possible les oscillations entretenues, à condition, comme le montre le calcul, de ne pas dépasser une certaine fréquence.* [Poincaré, 1908, p. 385]

5. D'après Lebon [1912, p. 67]. Les conférences de Poincaré seront ensuite publiées sous la forme d'un livre. Voir Poincaré [1909].
6. Il s'agit du texte BibNum analysé ici, notamment ses pages 390-393.

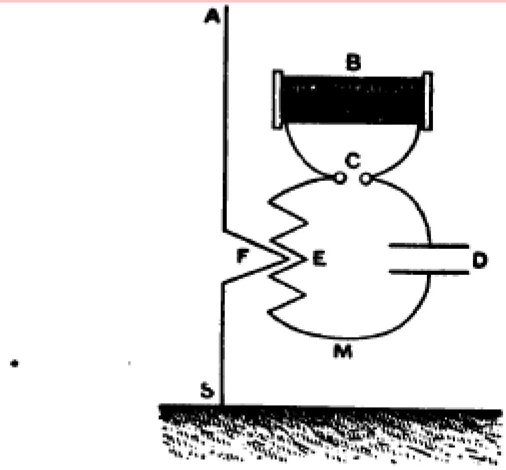
Dans ce même éditorial sont également mentionnés la question de la symétrie de l'arc et du maintien d'une dissymétrie qui assurerait l'existence d'oscillations de toutes fréquences. Tout lecteur de la revue, ce qui inclut une grande partie des spécialistes de l'électrotechnique et de la télégraphie sans fil naissante, a donc accès à ces textes exprimés en des termes parfaitement intelligibles, clairs et synthétiques.

L'émetteur à arc

L'émetteur à arc (technologie que détaille Poincaré dans sa conférence) est un dispositif inventé en 1903 par Valdemar Poulsen (1869-1942), le même qui invente en 1900 le premier enregistreur magnétique (ancêtre du microphone). Couplé à une antenne, il permet l'émission d'un signal électromagnétique de fréquence donnée – le jaillissement d'un arc entre deux sphères était à la base des expériences de Hertz en ondes radio.

L'émetteur à arc sera largement utilisé dans la radiotélégraphie naissante (notamment dans la sécurité maritime qui fut une des premières applications d'envergure), jusqu'à l'apparition des premiers tubes électroniques qui remplaceront progressivement l'émetteur à arc (celui-ci a néanmoins perduré comme émetteur de secours dans la marine jusque dans les années 1980).

Il s'agit d'un des premiers convertisseurs (d'où le nom parfois donné de *convertisseur à arc*) de courant continu en signal radioélectrique (énergie électromagnétique rayonnée).



B, bobine de Ruhmkorff. — CDME, excitateur primaire. — C, intervalle où éclate l'étincelle. — D, bouteilles de Leyde. — AFS, secondaire. — A, antenne. — F, enroulement secondaire du transformateur. — S, sol. Les bouteilles de Leyde D et le transformateur EF sont représentés schématiquement, suivant l'usage des électriciens.

***Figure 4 :* Schéma d'un émetteur à arc, présenté par Poincaré dans son ouvrage** *(tel que référencé en figure 1, schéma p.92, légendé « Transmetteur Marconi »). B est un générateur de courant continu ; C est le lieu de l'arc électrique ; D est un condensateur ; E est une bobine*

d'inductance ; CDME forme le circuit primaire ; l'antenne est le circuit secondaire.

Si on place en dérivation sur un arc électrique C (jaillissant entre deux électrodes reliées à une source continue B) une capacité suivie d'une bobine d'inductance, on constate que ce circuit résonateur « LC » est le siège d'oscillations entretenues. Les oscillations entretenues sont couplées à l'antenne radioélectrique qui permet d'émettre l'onde radio à une certaine fréquence. Comme rappelle Poincaré, « il n'y pas connexion directe entre l'antenne et l'excitateur ; l'ébranlement ne se transmet à l'antenne que par induction ».
Le surnom d'*arc chantant* a été donné par William Du Bois Duddell à ce dispositif après qu'il a pu constater que ce dernier pouvait également produire des sons (résonance à une fréquence audio donnée).

LA MISE EN ÉQUATION DES OSCILLATIONS ENTRETENUES PAR L'ARC CHANTANT

Dans sa dernière conférence Henri Poincaré s'intéresse plus particulièrement au dispositif de l'arc chantant et aux oscillations entretenues qu'il produit. Le schéma du montage présenté Figure 5 est identique à celui de Blondel [1905b, p. 77] :

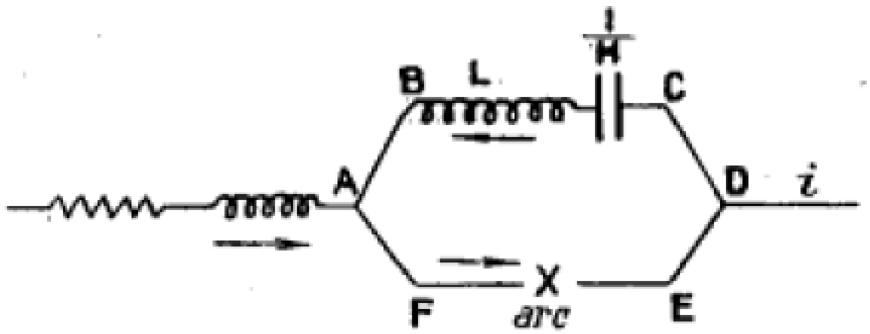


***Figure 5* : Oscillations entretenues par l'arc chantant -** *d'après Poincaré [1908, p. 390].*

Ce circuit comprend « une source de force électromotrice constante continue *E*, une résistance et une self, et, en parallèle, d'une part un arc, de l'autre une self et une capacité. » [Poincaré 1908, p. 390]. Il réalise alors la mise en équation des oscillations de l'arc chantant – elle avait été faite auparavant[7], mais la formulation de Poincaré est plus synthétique que celle de ses

7. Elle avait été faite notamment par Blondel [1905]. Jonathan Zenneck [1929, p. 90], qui fut l'assistant de Karl Ferdinand Braun à Strasbourg, explique que cette équation a été initialement écrite par Kirchhoff et Lord Kelvin. De plus, on trouve dans les travaux de von S. Maisel [1904] et de Theodore Simon [1906] trace d'une équation différentielle et même de la condition de Poincaré.

prédécesseurs et il établit en outre la correspondance avec ses travaux sur les cycles limites. En appelant x la charge du condensateur et i le courant dans le circuit extérieur, l'intensité du courant dans la branche comportant le condensateur de capacité $\frac{1}{H}$ s'écrit :

$$x' = \frac{dx}{dt}$$ (le courant x' est la dérivée de la charge du condensateur)

Soit i_a l'intensité du courant dans l'arc, en appliquant la première loi de Kirchhoff[8] (1824-1887) et en tenant compte du sens du courant (voir figure 6) , il obtient : $i = i_a - x'$.

Ainsi, le courant circulant dans l'arc est $i_a = i + x'$. En exprimant alors, au moyen de la seconde loi de Kirchhoff[9], la tension dans la maille ABCDEF, Poincaré établit l'équation différentielle non linéaire du second ordre des oscillations entretenues par l'arc chantant

$$Lx'' + \rho x' + \varphi(i + x') + Hx = 0 \qquad (P_1)$$

LA FORCE ÉLECTROMOTRICE DE L'ARC CHANTANT

Poincaré précise :

> $\rho x'$ *étant un terme qui correspond à la résistance interne de la self et aux autres causes possibles d'amortissement*[10]*, y compris le rayonnement par l'antenne,* $\varphi(i + x')$ *le terme dû à l'arc.*

Ce dernier terme représente la force électromotrice de l'arc chantant qui est à relier à l'intensité qui le traverse par une relation déterminée empiriquement. Les controverses liées à l'existence d'une force contre-électromotrice au sein de l'arc et les difficultés inhérentes à l'expérimentation ont jeté le discrédit sur cette relation dont l'indétermination rend impossible l'intégration de l'équation (P_1), comme le soulignera plus tard Paul Janet [1919]. Mais cela ne semble pas constituer un obstacle pour Henri Poincaré qui envisage le problème comme s'il

8. Loi des nœuds : le circuit à courant i se divisant en deux branches à courants respectifs i_1 et i_2, on a $i = i_1 + i_2$.
9. Loi des mailles : dans une quelconque maille d'un réseau, la somme algébrique des tensions le long de la maille est constamment nulle.
10. x' étant une intensité, ρx' est bien un terme de type Ri, exprimant la résistance au passage du courant.

était déjà résolu. Pour contourner la difficulté il exprime la tension dans la maille AFED. Une version simplifiée du circuit, présentée ci-dessous (fig. 6), permet d'appréhender l'équation qu'il obtient.

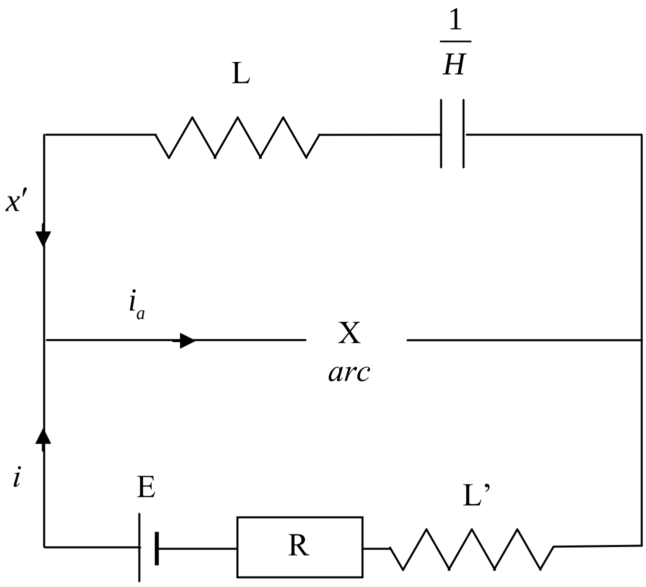


***Figure 6* : Oscillations entretenues par l'arc chantant, schéma simplifié.** *R et L' sont respectivement la résistance et l'inductance, figurant à gauche dans le schéma 2.*

En négligeant la self extérieure[11] L' et en égalant la tension dans la branche inférieure et médiane du circuit simplifié, il écrit : $E - Ri = \varphi(i + x')$ dont il déduit

$$Ri + \varphi(i + x') = E \qquad (P_2)$$

Il explique alors que

> *si on suppose connue la fonction φ, l'équation (P_2) donne une relation entre i et x' ou entre i+x' et x'.*

En effet, il est facile de vérifier, à titre d'exemple, que si l'on donne à la fonction φ la forme que Poincaré lui attribue quelques pages plus loin et qui est celle de S. P. Thompson[12] : $\varphi(i + x') = \dfrac{a}{i + x'} + b$ on obtient alors l'équation suivante :

11. L'induction placée à côté du générateur, également appelée « self en tête » ou « self de choc», jouait un rôle analogue à celui d'une masse dans système en mouvement et avait donc pour but de produire une sorte d'inertie dans le circuit permettant ainsi d'une part de réguler la tension dans le circuit et, d'autre part de protéger le générateur. Si d'un point de vue pratique son rôle paraît indispensable sa présence dans les équations n'est pas nécessaire.
12. Il est intéressant de remarquer que Poincaré semble être au courant des dernières hypothèses et théories concernant l'arc et notamment des travaux de Blondel [1897] puisqu'il choisit non pas la relation d'Ayrton (la plus récente) mais celle de Thompson car elle ne contient pas de force contre-électromotrice.

$$Ri^2+(Rx'+b-E)i+a+(b-E)x'=0$$

La résolution de cette équation du second degré en *i* fournit effectivement une relation entre *i* et *x'*. Mais le raisonnement employé par Poincaré probablement basé sur l'utilisation du *Théorème des Fonctions Implicites* lui permet de s'affranchir de tous ces calculs. Si l'on suppose comme il le fait que la fonction φ est connue, l'équation (P_2) conduit à une fonction F qui relie *i* à *x'*. Posons : $i = F(x')$ et remplaçons dans l'équation (P_2) on a alors :

$$\varphi(i+x')=E-RF(x')=\theta(x')$$

Il peut ainsi remplacer φ dans l'équation P_1 par $\theta(x')$. La difficulté est levée car l'équation différentielle ne dépend désormais plus que d'une seule variable *x*. Il l'écrit :

$$Lx''+\rho x'+\theta(x')+Hx=0 \qquad (P_3)$$

Poincaré a ainsi réalisé la toute première mise en équation[13] des oscillations dont l'arc chantant est le siège. Il est important de souligner que cette équation (P_3) correspond exactement par dualité à celle qu'établira Blondel [1919b] pour la triode puis Van der Pol [1926]. D'ailleurs, l'analogie que présentent les oscillations entretenues par l'arc chantant et par la triode sera mise en lumière par Paul Janet [1919].

LA STABILITÉ DES OSCILLATIONS ENTRETENUES ET LES CYCLES LIMITES

Poincaré démontre alors plus de vingt ans avant Andronov [1929a], que la stabilité de la solution de l'équation (P_3) est liée à l'existence d'une courbe fermée : un *cycle limite*. Pour y parvenir il se place, en faisant une substitution de variables, dans le plan de phase qu'il a lui-même introduit dans ses mémoires « Sur les Courbes définies par une équation différentielle » [Poincaré 1886, p. 168] en posant :

$$x'=\frac{dx}{dt}=y \qquad ; \qquad dt=\frac{dx}{y} \qquad ; \qquad x''=\frac{dy}{dt}=\frac{ydy}{dx}$$

13. L'équation (P_3) est néanmoins incomplète à cause de l'indétermination de la fonction $\theta(x')$.

L'équation (P_3) devient :

$$Ly\frac{dy}{dx}+\rho y+\theta(y)+Hx=0 \qquad (P_4)$$

La théorie des cycles-limites de Poincaré

Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques d'un système donné : Poincaré introduit cette notion dans son second mémoire de 1882[14], à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment.

La représentation de l'évolution d'un système (pendule par exemple) au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase défini par Poincaré, c'est-à-dire, dans un espace de coordonnées tel que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse (par exemple (x,y) = (position, vitesse) conduit Poincaré à une classification des points fixes ou points d'équilibres du système. Il démontre alors, par analogie avec un système topographique, qu'il en existe de trois types différents[15] qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, nœud et foyer. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodiques pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre.

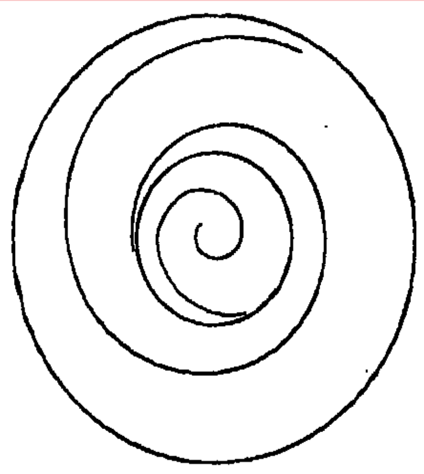


***Figure 7 :* Exemple de cycle limite de Poincaré [1882, p. 278]**

14. « Mémoire sur les courbes limites définies par une équation différentielle », chapitre VI (cycles limite), *Journal de mathématiques*, 3° série **8** (1882) p. 251-296. Voir Jean-Pierre Françoise, « La théorie des cycles limites », in *L'Héritage scientifique de Poincaré* (dir. E . Charpentier, E . Ghys, A. Lesne), Belin 2006.
15. Auxquels vient s'jouter le cas dégénéré des points de type centre.

Poincaré fournit ensuite la représentation graphique suivante :

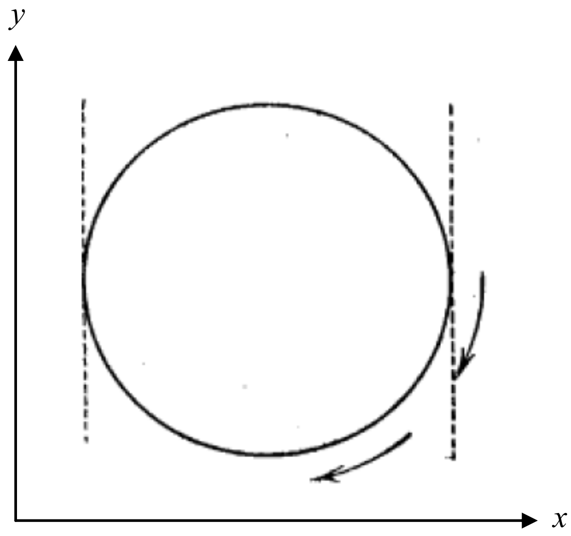


***Figure 8* : Courbe fermée, d'après Poincaré [1908, p. 390].**

Il est important de remarquer d'une part que cette courbe fermée est représentée dans le plan de phase $(x, y) = (x, \dot{x})$, c'est-à-dire, le plan de phase tension-courant[16] (u_a, i_a)de l'arc et, d'autre part qu'elle ne constitue qu'une métaphore de la solution, dans la mesure où Poincaré n'a fait appel à aucune méthode d'intégration graphique pour l'obtenir. Cette représentation n'a en réalité pour unique but que celui de préciser le sens de parcours de la courbe trajectoire : condition préalable nécessaire à l'établissement de la démonstration qui suit alors.

> *On peut construire les courbes qui satisfont à cette équation différentielle, à condition de connaître la fonction θ. Les oscillations entretenues correspondent aux courbes fermées, s'il y en a. Mais toute courbe fermée ne convient pas, elle doit remplir certaines conditions de stabilité que nous allons étudier. Tout d'abord on voit que, si y=0, dy/dx est infini, la courbe a des tangentes verticales. En outre, si x décroît, x', c'est-à-dire, y, est négatif, donc la courbe doit être décrite dans le sens de la flèche.* [Poincaré 1908, p. 390].

En effet, de l'équation (P_4) il est facile de tirer :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\rho y + \theta(y) + Hx}{Ly} = -\frac{\rho}{L} - \frac{\theta(y) + Hx}{Ly} \qquad (P_5)$$

16. Il s'agit, à une permutation près des axes *i* et *u*, du même plan de phase que celui qu'a utilisé Blondel [1905a, p. 1681]. Ainsi, il apparaît que le cycle d'hystérésis correspond exactement à la courbe fermée de Poincaré, c'est-à-dire, à un cycle limite.

On en déduit que, lorsque y tend vers zéro, le membre de droite de cette équation devient infini. Par conséquent, cette courbe fermée admet des tangentes verticales représentées en pointillés sur la Fig. 8. Quant au sens de parcours, le raisonnement est basé sur le fait que la dérivée d'une fonction décroissante est négative. Ainsi, lorsque x décroît, x' devient négatif. Or en vertu de l'équation posée : $x'=y$. Ceci implique que y devienne également négatif. Ceci n'est possible qu'à condition de décrire la courbe dans le sens indiqué par la flèche. Il peut paraître surprenant de s'intéresser, en premier lieu, au sens de parcours de la courbe trajectoire. La raison, qui n'apparaît pas de façon évidente, est la recherche d'une condition fournie par une inégalité dont le sens va permettre de statuer sur la stabilité des oscillations entretenues. La démonstration donnée ci-dessous fait appel à la formule de Green pour l'intégration le long d'une courbe fermée ce qui nécessite de connaître le sens de parcours des courbes trajectoires pour en définir l'orientation. Poincaré présente alors une première version de la stabilité des oscillations entretenues qui est essentiellement basée sur l'existence d'une courbe fermée :

> Condition de stabilité. – *Considérons donc une autre courbe non fermée satisfaisant à l'équation différentielle, ce sera une sorte de spirale se rapprochant indéfiniment de la courbe fermée. Si la courbe fermée représente un régime stable, en décrivant la spirale dans le sens de la flèche on doit être ramené sur la courbe fermée, et c'est à cette seule condition que la courbe fermée représentera un régime stable d'ondes entretenues et donnera lieu à la solution du problème*. [Poincaré 1908, p. 391]

Dans la *Notice sur les Travaux scientifiques d'Henri Poincaré* faite par lui-même en 1886 (à l'appui de sa candidature comme Membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie), il définit le concept de *cycle limite* ainsi :

> *J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre*. [Poincaré 1886, p. 30]

Par comparaison avec la *condition de stabilité* présentée dans le texte de 1908, il apparaît clairement que « la courbe fermée » qui représente le régime stable d'ondes entretenues n'est rien d'autre qu'un *cycle limite* au sens où il l'a lui-même défini. On peut néanmoins s'interroger sur les raisons qui l'ont poussé à ne pas l'écrire explicitement. Cette présentation étant destinée à des ingénieurs et non à des mathématiciens, peut-être a-t-il jugé que l'introduction d'une telle terminologie n'apportait rien[17].

LES CYCLES LIMITES DE POINCARÉ DANS L'HISTORIOGRAPHIE

Poincaré sort ensuite du « contexte purement mathématique[18] » pour démontrer que ce problème possède une réalité physique. Bien plus qu'une simple correspondance entre courbe fermée et oscillations entretenues, Poincaré établit alors la stabilité de la courbe fermée, i.e., la stabilité du cycle limite sous la forme d'une inégalité :

> *Condition de possibilité du problème. – Revenons à l'équation (P_4). Multiplions par* x'dt *et intégrons, pendant une période, le terme en* L *et le terme en* x*, qui donnent à l'intégration des termes en* x' *et* x*, disparaissent et on doit avoir*
>
> $$\rho\int x'^2 dt + \int \theta(x')x'dt = 0$$
>
> *Or, le premier terme est sûrement positif, la fonction θ doit donc être telle que*
>
> $$\int \theta(x')x'dt < 0 \qquad (P_6)$$
>
> *Cela est-il possible ?* » [Poincaré 1908, p. 391]

La première équation intégrale est facile à établir. En suivant les indications de Poincaré, on multiplie l'équation (P_4) par *x'dt* en tenant compte du fait que *x'dt = dx,* d'après l'équation de la page 30. On a donc :

$$\int Lydy + \int \rho x'^2 dt + \int \theta(x')x'dt + \int Hxdx = 0$$

Le premier et le dernier terme de cette équation qui correspondent à la conservation de l'énergie (½ Li^2 + ½ Hx^2) s'annulent. La seconde inégalité intégrale se déduit du fait que le second terme quadratique est « sûrement positif » d'après Poincaré [1908, p. 391].

Il obtient ainsi la condition de possibilité du problème : $\int \theta(x')x'dt < 0$ qui représente la condition de stabilité de la solution périodique. En réalité, Poincaré a fait ici implicitement appel au concept d'« exposants caractéristiques » qu'il a

17. Le cas du centre, qui constitue également une solution sous la forme d'une courbe fermée, semble avoir été exclu par Poincaré dans la mesure où ce système est non-conservatif.
18. Selon l'expression de Diner [1992, p. 340].

introduit dans le premier volume de ses *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [Poincaré, 1892, p. 176-177] pour établir la stabilité des trajectoires des planètes.

@@@@@@@

***Figure 9* : Le mathématicien et physicien russe Aleksandr Andronov (1901-1952)**

Vingt et un ans plus tard, une note du mathématicien russe Aleksandr Andronov [1929] intitulée « Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues » est présentée le 14 octobre 1929 par Jacques Hadamard devant les membres de l'Académie des sciences. Jusqu'à présent, l'historiographie considérait qu'Andronov avait réalisé dans cette note la toute première correspondance entre la solution périodique d'un oscillateur de la radiotechnique et le concept de cycle limite introduit par Poincaré en 1882 (voir Diner [1992, p. 339-340]). Cependant, l'analyse du travail d'Andronov [1929] révèle qu'outre cette correspondance, il fournit également une condition de stabilité de la solution périodique qui prend la forme d'une inégalité :

$$\int_0^{2\pi}\left[f'_x\left(R\cos(\xi),-R\sin(\xi);0\right)+g'_y\left(R\cos(\xi),-R\sin(\xi);0\right)\right]d\xi<0 \qquad (A_1)$$

Bien qu'il semble peu probable qu'Andronov ait eu accès à ce document, il est possible de démontrer, en utilisant la formule de Green[19] et en se replaçant

19. La formule de Green (du nom de George Green 1793-1841) donne la relation entre une intégrale curviligne autour d'une courbe simple fermée C et l'intégrale double sur la région du plan D délimitée par C : $\int_C f(x,y)dy-g(x,y)dx=\iint_D\left(f'_x(x,y)+g'_y(x,y)\right)dxdy$

dans un système de coordonnées cartésiennes, que la condition de stabilité de Poincaré (P_6) est exactement identique à la condition (A_1) qu'établira vingt et un ans plus tard Andronov [1929, p. 561].

Ainsi, lors de ces conférences réalisées en mai-juin 1908, Poincaré avait d'une part établi la correspondance entre solution périodique d'un oscillateur de la radiotechnique et le concept de cycle limite qu'il avait introduit en 1882, et il avait d'autre part fourni une condition de stabilité de la solution périodique, i.e. une condition de stabilité du cycle limite.

■

(mars 2011)

ANNEXE – RÉFÉRENCES DE L'ARTICLE

Remerciements

L'auteur remercie Alexandre Moatti pour sa relecture et ses suggestions sur ce présent article ainsi que Christian Gérini, agrégé de Mathématiques, docteur en histoire des sciences et Bruno Rossetto, Professeur des Universités.

ANDRONOV (Aleksandr Aleksandrovich)

[1929] Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, *C.R.A.S.*, 189 (14 octobre 1929), p. 559-561.

ATTEN (Michel), DU CASTEL (François) et PIERRE (Marie)

[1999] *Les télécoms : histoire des écoles supérieures des télécommunications*, Paris : Hachette, 1999.

BLONDEL (André)

[1905a] Sur les phénomènes de l'arc chantant, *C.R.A.S.*, 140 (13 juin 1905), p. 1680-1682.

[1905b] Sur les phénomènes de l'arc chantant, *Revue Générale des Sciences,* 16 (1905), p. 708 ; *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, (IV) 5 (1906), p. 77- 97.

[1912] Henri Poincaré, *La Lumière Électrique*, (2e série) XIX (1912), p. 99-101.

[1919] Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs, *C.R.A.S.*, 169 (17 novembre 1919), p. 943-948.

DINER (Simon)

[1992] Les voies du chaos déterministe dans l'école russe, in A. Dahan. Dalmedico, J.-L. Chabert, J.-L. & K. Chemla, éd., Chaos et déterminisme, Paris : Éditions du Seuil (coll. Points Sciences), 1992, p. 331-368.

GINOUX (J.M.) & PETITGIRARD (Loïc)

[2010] Poincaré's forgotten conferences on wireless telegraphy, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, vol.11 (november 2010).

JANET (Paul)

[1919] Sur une analogie électrotechnique des oscillations entretenues, *C.R.A.S.,* 168 (14 avril 1919), p. 764-766.

LEBON (Ernest)

[1912] *Henri Poincaré, biographie, bibliographie analytique des écrits*, Paris : Gauthier-Villars (Coll. Savants du Jour), 1912.

MAISEL (von S.)

[1905] Zur Theorie ungedampfter elektrischer Schwingungen, *Physikalische Zeitschrift*, 6 (1905), p. 38-43.

POINCARÉ (Henri)

[1881] Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (III) 7 (1881), p. 375-422,

[1882] Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (III) 8 (1882), p. 251-296,

[1885] Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (IV) 1 (1885), p. 167-244,

[1886] Sur les courbes définies par une équation différentielle,

Journal de mathématiques pures et appliquées, (IV) 2 (1886), p. 151-217.
[1886n] *Notice sur les Travaux Scientifiques de Henri Poincaré*, Paris : Gauthier-Villars, 1886.
[1892-93-99] Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Paris : Gauthier-Villars, 1892, 1893, 1899.
[1902a] Notice sur la télégraphie sans fil, *Annuaire du Bureau des longitudes*, p. A1- A34.
[1902b] Sur la télégraphie sans fil, *Revue scientifique*, 17 (1902), p. 65-73.
[1907] *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes : la télégraphie sans fil*, 3e éd., Paris : Gauthier-Villars, 1907.
[1908] Sur la télégraphie sans fil, *La Lumière Électrique*, (II) 4, p. 259-266, 291-297, 323-327, 355-359 et 387-393.
[1909] *Conférences sur la télégraphie sans fil*, *éd. La Lumière Électrique*, Paris, 1909.

SIMON (Hermann Theodor)
[1906] Zür Theorie des selbsttönenden Lichtbogens, *Physikalische Zeitschrift*, 7 (1906), p. 433-445.

VAN DER POL (Balthazar)
[1926] On "relaxation-oscillations", *Philosophical Magazine*, (VII) 2 (1926), p. 978-992.

ZENNECK (Jonathan)
[1915] *Wireless Telegraphy*, New York : McGraw-Hill, 1915.
[1929] The importance of Radiotelegraphy in Science, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 17 (1929), p. 89-114.