Information du lecteur

La première partie du document ci-après correspond à la traduction française (par J.-P. Belna) de l'article de Georg Cantor (*Mathematische Annalen*, XLVI, 1895) mentionné dans l'onglet « Information ». L'article d'origine, en allemand, constitue la deuxième partie du présent document.

(ci-contre, Georg Cantor, 1845-1918, vers l'époque de l'article)

Contributions au fondement de la théorie des ensembles transfinis

par Georg Cantor à Halle
(premier article)

« Hypotheses non fingo. » [Newton]

« Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrum nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus. »

« Venlet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris servi diligentia. »[1]

§ 1.
LE CONCEPT DE PUISSANCE OU LE NOMBRE CARDINAL

Par « ensemble », nous entendons tout rassemblement M en une totalité d'objets m de notre intuition ou de notre pensée, déterminés et bien différenciés (qui seront appelés les « éléments » de M).

En signes, nous exprimerons cela ainsi :

(1) $$M = \{m\}$$

Nous désignerons la réunion de plusieurs ensembles $M, N, P, \ldots$, qui n'ont aucun élément commun, par

(2) $$(M, N, P, \ldots)$$

Les éléments de cet ensemble sont donc les éléments de M, de N, de P, etc. rassemblés.

Nous appelons « partie » ou « ensemble partiel » d'un ensemble M tout *autre* ensemble M_1 dont les éléments sont également des éléments de M.

Si M_2 est une partie de M_1, M_1 une partie de M, M_2 est aussi une partie de M.

Tout ensemble M possède une « puissance » déterminée, que nous appelons aussi son « nombre cardinal ».

Nous appelons « puissance » ou « nombre cardinal » de M le concept général qui, grâce à notre faculté active de pensée, résulte de l'ensemble M dès lors qu'il est fait abstraction de la nature de ses différents éléments m et de l'ordre dans lequel ils sont donnés.

Nous désignons le résultat de ce double acte d'abstraction, le nombre cardinal ou puissance de M, par

(3) $$\overline{\overline{M}}\,.$$

1. [N.D.T.] La première citation latine est tirée de la deuxième édition des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* de Newton, publiée en 1713, où il expose sa théorie de la gravitation universelle. La deuxième est empruntée à Francis Bacon (1561-1626), communément considéré comme le père de la méthode expérimentale et dont Cantor était persuadé qu'il était le véritable auteur des pièces de Shakespeare. La troisième est tirée de la Bible.

Puisque chaque élément isolé m, abstraction faite de sa nature, devient un « un », le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ est lui-même un ensemble déterminé constitué de purs uns, qui existent dans notre esprit comme image intellectuelle ou projection de l'ensemble donné M.

Nous appelons « équivalents » deux ensembles M et N, et le désignons par

(4) $$M \sim N \text{ ou } N \sim M,$$

s'il est possible de les mettre, conformément à une loi, dans une relation telle qu'à chaque élément de l'un correspond un et un seul élément de l'autre.

À toute partie M_1 de M correspond alors une partie équivalente déterminée N_1 de N et inversement.

Si on a une telle loi de correspondance [*Zuordnungsgesetze*] de deux ensembles équivalents, elle peut être modifiée de différentes manières (sauf dans le cas où chacun des ensembles ne consiste qu'en un seul élément). On peut toujours notamment veiller à ce qu'à un élément particulier m_0 de M corresponde n'importe quel élément particulier n_0 de N. En effet, si par la loi originelle, les éléments m_0 et n_0 ne se correspondent pas encore l'un à l'autre, mais qu'à l'élément m_0 de M correspond plutôt l'élément n_1 de N et à l'élément n_0 de N plutôt l'élément m_1 de M, on peut modifier la loi de façon que m_0 et n_0 et de même m_1 et n_1 deviennent des éléments correspondants des deux ensembles, cependant que la première loi demeure inchangée pour les éléments restants. Ainsi le but est-il atteint.

Tout ensemble est équivalent à lui-même :

(5) $$M \sim M.$$

Si deux ensembles sont équivalents à un troisième, ils sont équivalents l'un à l'autre :

(6) $$\text{de } M \sim P \text{ et } N \sim P \text{ il suit } M \sim N.$$

Il est d'une importance capitale *que deux ensembles M et N aient le même nombre cardinal lorsque et seulement lorsque ils sont équivalents* :

(7) $$\text{de } M \sim N \text{ il suit } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}},$$

et

(8) $$\text{de } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ il suit } M \sim N.$$

L'équivalence des ensembles constitue ainsi la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de leurs nombres cardinaux.

Effectivement, d'après la définition de la puissance donnée ci-dessus, le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ demeure inchangé si un élément, ou plusieurs éléments, ou même tous les éléments m de M, est remplacé par une autre chose.

Si maintenant $M \sim N$, cela se fonde sur une loi de correspondance par laquelle M et N sont liés l'un à l'autre biunivoquement, de sorte qu'à chaque élément m de M correspond un élément n de N. Nous pouvons alors nous imaginer qu'à chaque élément m de M est substitué l'élément correspondant n de N et transformer ainsi M en N sans modifier le nombre cardinal. Il s'ensuit

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

La réciproque du théorème résulte de la remarque qu'existe entre les éléments de M et les différents uns de son nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ une relation de correspondance biunivoque. Car en quelque sorte, comme nous l'avons vu, $\overline{\overline{M}}$ naît de M du fait que chaque élément m de M devient un un particulier de $\overline{\overline{M}}$. Nous pouvons donc dire que

(9) $$M \sim \overline{\overline{M}}.$$

De même, $N \sim \overline{\overline{N}}$. Comme $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, il suit, d'après (6), que $M \sim N$.

Nous mettons encore en évidence le théorème suivant, qui résulte immédiatement du concept d'équivalence :

Si M, N, P, … sont des ensembles n'ayant aucun élément commun, si M', N', P', … sont des ensembles possédant cette même propriété, et si

$$M \sim M', N \sim N', P \sim P', \ldots,$$

on a toujours aussi

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.
« Plus grand » et « plus petit » pour les puissances

Si deux ensembles M et N de nombres cardinaux $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ et $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ satisfont aux *deux* conditions :

1) *il n'y a aucune partie de M qui soit équivalente à N,*
2) *il y a une partie N_1 de N telle que $N_1 \sim M$,*

il est immédiatement évident que ces conditions demeurent satisfaites si les ensembles M et N sont remplacés par deux ensembles M' et N' qui leur sont respectivement équivalents ; *elles expriment donc une relation déterminée entre les nombres cardinaux* $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

De plus, *l'équivalence de M et de N, donc l'égalité de* $\mathfrak{a}$ *et de* $\mathfrak{b}$, *est exclue* ; car si on avait $M \sim N$, on aurait aussi, puisque $N_1 \sim M$, $N_1 \sim N$ et, du fait que $M \sim N$, il existerait aussi une partie M_1 de M telle que $M_1 \sim M$, et on aurait aussi $M_1 \sim N$, ce qui contredit la condition 1).

En troisième lieu, *la relation de* $\mathfrak{a}$ *à* $\mathfrak{b}$ *est telle qu'elle rend impossible la même relation de* $\mathfrak{b}$ *à* $\mathfrak{a}$; car si dans 1) et 2), les rôles de M et de N sont échangés, il en résulte deux conditions qui contredisent les premières.

Nous exprimons la relation de $\mathfrak{a}$ *à* $\mathfrak{b}$ *caractérisée par 1) et 2)* en disant : $\mathfrak{a}$ *est plus petit que* $\mathfrak{b}$ *ou encore* $\mathfrak{b}$ *est plus grand que* $\mathfrak{a}$, en signes

(1) $$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ ou } \mathfrak{b} > \mathfrak{a}.$$

On démontre facilement que

(2) $$\text{si } \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ et } \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \text{ on a toujours } \mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

De même, il résulte immédiatement de la définition que, *si P_1 est une partie d'un ensemble P, de* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P_1}}$ *résulte toujours aussi* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *et de* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *résulte toujours aussi* $\overline{\overline{P_1}} < \mathfrak{b}$.

Nous avons vu que chacune des trois relations

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

exclut les deux autres.

En revanche, il ne va nullement de soi et, à ce stade du cours de nos idées, on ne pourrait guère démontrer que pour deux nombres cardinaux quelconques $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *l'une de ces trois relations doive nécessairement être vérifiée.*

Ce n'est que plus tard, lorsque nous aurons acquis une vue d'ensemble sur la suite croissante des nombres cardinaux et compris son enchaînement, qu'il en résultera la vérité du théorème :

A. « *Si* $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ *sont deux nombres cardinaux arbitraires, soit* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, *soit* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, *soit* $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. »

Il est des plus élémentaires de dériver de ce théorème les théorèmes suivants, dont nous ne ferons cependant aucun usage pour l'instant :

B. « *Si deux ensembles M et N sont tels que M est équivalent à une partie N_1 de N et N à une partie M_1 de M, M et N sont aussi équivalents.* »

C. « *Si M_1 est une partie d'un ensemble M, M_2 une partie de l'ensemble M_1 et si les ensembles M et M_2 sont équivalents, M_1 est aussi équivalent aux ensembles M et M_2.* »

D. « *Si deux ensembles M et N son tels que N n'est équivalent ni à M lui-même ni à aucune partie de M, il y a une partie N_1 de N qui est équivalente à M.* »

E. « *Si deux ensembles M et N ne sont pas équivalents, et s'il y a une partie N_1 de N qui est équivalente à M, il n'y a aucune partie de M qui soit équivalente à N.* »

§ 3.
L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION DES PUISSANCES

La réunion de deux ensembles M et N qui n'ont aucun élément commun a été désignée au § 1, (2) par (M, N). Nous l'appelons l'« *ensemble-réunion* » de M et de N.

Si M' et N' sont deux autres ensembles sans éléments communs et si $M \sim N$, nous avons vu que

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Il en résulte que le nombre cardinal de (M, N) ne dépend que des nombres cardinaux $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ et $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$.

Cela conduit à la définition de la somme de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$, en posant

(1) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Puisqu'il est fait abstraction, dans le concept de puissance, de l'ordre des éléments, il suit

(2) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

et pour trois nombres cardinaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

(3) $$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$

Venons-en à la multiplication.

Chaque élément m d'un ensemble M peut être lié à chaque élément n d'un ensemble N pour former un nouvel élément (m, n). Nous notons $(M . N)$ l'ensemble de toutes ces liaisons (m, n). Nous l'appelons l'« *ensemble-liaison* [*Verbindungsmenge*] *de M et de N* ». On a donc :

(4) $$(M . N) = \{(m, n)\}.$$

On se convainc que la puissance de $(M . N)$ ne dépend également que des puissances $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; en effet, si on remplace les ensembles M et N par leurs ensembles équivalents

$$M' = \{m'\} \text{ et } N' = \{n'\}$$

et si on considère m, m' ainsi que n, n' comme des éléments correspondants, l'ensemble

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

sera lié à $(M . N)$ par une correspondance biunivoque telle qu'on regarde (m, n) et (m', n') comme des éléments correspondants ; donc

(5) $$(M' . N') \sim (M . N).$$

Nous définissons alors le produit $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ par l'égalité

(6) $$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M \cdot N)}}.$$

On peut aussi construire un ensemble de nombre cardinal $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ à partir de deux ensembles M et N de nombres cardinaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ par la règle suivante : on part de l'ensemble N et on y remplace chaque élément n par un ensemble $M_n \sim M$; si on rassemble en un tout S les éléments de tous ces ensembles M_n, on voit facilement que

(7) $$S \sim (M . N),$$

et par suite

$$\overline{\overline{S}} = a \, . \, b.$$

En effet, si pour n'importe quelle loi de correspondance des ensembles équivalents M et M_n, on désigne par m_n l'élément de M_n correspondant à l'élément m de M, on a

(8) $$S = \{m_n\},$$

et ainsi les ensembles S et $(M \, . \, N)$ sont liés l'un à l'autre par une correspondance biunivoque telle que les m_n et (m, n) sont considérés comme des éléments correspondants.

De nos définitions suivent aisément les théorèmes :

(9) $$a \, . \, b = b \, . \, a,$$

(10) $$a \, . \, (b \, . \, c) = (a \, . \, b) \, . \, c,$$

(11) $$a\,(b + c) = ab + ac,$$

puisque

$$(M \, . \, N) \sim (N \, . \, M),$$
$$(M \, . \, (N \, . \, P)) \sim ((M \, . \, N) \, . \, P),$$
$$(M \, . \, (N \, , P)) \sim ((M \, . \, N) \, , (M \, . \, P)).$$

Addition et multiplication des puissances sont donc soumises universellement aux lois commutative, associative et distributive.

§ 4.
L'EXPONENTIATION DES PUISSANCES

Par « *recouvrement* [*Belegung*] *de l'ensemble N par des éléments de l'ensemble M* » ou, plus simplement, par « *recouvrement de N par M* », nous entendons une loi par laquelle à chaque élément de n de N est lié un élément déterminé de M, où un et le même élément de M peut être utilisé de façon répétée. L'élément de M lié à n est en quelque sorte une fonction univoque de n et peut, par exemple, être désigné par $f(n)$; elle est dite « *fonction de recouvrement* de n » ; le recouvrement correspondant de N sera appelé $f(N)$.

Deux recouvrements $f_1(N)$ et $f_2(N)$ sont dits égaux si et seulement si l'égalité suivante est satisfaite *pour tous les éléments n de N*

(1) $$f_1(n) = f_2(n),$$

de sorte que si l'égalité ne vaut pas, même pour un unique élément particulier $n = n_0$, $f_1(N)$ et $f_2(N)$ sont caractérisés comme des recouvrements différents de N.

On peut, par exemple, si m_0 est un élément particulier de M, supposer que pour tous les n

$$f(n) = m_0 \;;$$

cette loi constitue un recouvrement particulier de N par M.

Si m_0 et m_1 sont deux éléments particuliers et différents de M et n_0 un élément particulier de N, il résultera une autre sorte de recouvrement de l'hypothèse

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

pour tous les n différents de n_0.

La totalité de tous les recouvrements distincts de N par M constitue un ensemble déterminé d'éléments $f(N)$; nous l'appelons « *l'ensemble de recouvrement de N par M* » et le désignons par $(N \mid M)$. Ainsi

(2) $$(N \mid M) = \{f(N)\}.$$

Si $M \sim M'$ et $N \sim N'$, on voit aisément que

(3) $$(N \mid M) = (N' \mid M')$$

Le nombre cardinal de $(N \mid M)$ ne dépend donc que des nombres cardinaux $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ et $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; ils nous servent à définir la puissance[2] [*Potenz*] $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

(4) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}\,.$$

Pour trois ensembles quelconques M, N et P, on démontre aisément les théorèmes :

(5) $$(N \mid M) \,.\, (P \mid M) \sim ((N, P) \mid M),$$

(6) $$((P \mid M) \,.\, (P \mid N)) \sim (P \mid (M, N)),$$

(7) $$(P \mid (N \mid M)) \sim ((P \,.\, N) \mid M),$$

dont il résulte, si on pose $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$, que, sur la base de (4) et compte tenu du §3, pour trois nombres cardinaux quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, les théorèmes

(8) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \,.\, \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}},$$

(9) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \,.\, \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}},$$

(10) $$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}.$$

On reconnaîtra sur l'exemple suivant combien ces formules simples, étendues aux puissances, sont riches de contenu et d'une grande portée.

Si nous désignons par $\mathfrak{o}$ la puissance du continu linéaire X (c.-à-d. de la collection X de tous les nombres réels x, qui sont = 0 et = 1), on se convainc aisément qu'elle peut être représentée par, entre autres, la formule

(11) $$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0},$$

où la signification de $\aleph_0$ est donnée au § 6.

En effet, d'après (4), $2^{\aleph_0}$ n'est rien d'autre que la puissance de toutes les représentations [*Darstellungen*]

(12) $$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(n)}{2^n} + \ldots \qquad \text{(où } f(n) = 0 \text{ ou } 1\text{)}$$

des nombres x dans le système binaire. Si nous notons en même temps que tout nombre x n'a qu'une seule représentation, à l'exception des nombres $x = \dfrac{2n+1}{2^m} < 1$, qui seront représentés deux fois, nous avons immédiatement, si nous désignons par $\{s_n\}$ la totalité « dénombrable » de ces derniers

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_n\}, X)}}$$

Si on retranche de X un ensemble « dénombrable » quelconque $\{t_n\}$ et qu'on désigne le reste par X_1, on a

$$X = (\{t_n\}, X_1) = (\{t_{2n-1}\}, \{t_{2n}\}, X_1)$$

$$(\{s_n\}, X) = (\{s_n\}, \{t_n\}, X_1)$$

$$\{t_{2n-1}\} \sim \{s_n\} \qquad \{t_{2n}\} \sim \{t_n\} \qquad X_1 \sim X_1,$$

par conséquent

$$X \sim (\{s_n\}, X)$$

donc (§ 1) $$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}\,.$$

Il suit de (11), en élevant au carré (d'après § 6, (6))

$$\mathfrak{o} \,.\, \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

et par multiplications successives par $\mathfrak{o}$

(13) $$\mathfrak{o}^n = \mathfrak{o}\,.$$

Si on élève les deux côtés de (11) à la puissance $\aleph_0$, on obtient

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}\,.$$

Mais puisque d'après § 6, (8) $\aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0$

2. [N.D.T.] Le mot «puissance », qui traduit «*Potenz* », est ici à entendre au sens de l'élévation à une puissance, et non au sens de nombre cardinal, où il traduit « *Machtigkeit* ». La langue française ne peut éviter une ambiguïté absente en allemand.

(14) $$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}\,.$$

Mais les formules (13) et (14) n'ont pas d'autre signification que celle-ci : « Le continu de dimension n comme le continu de dimension $\aleph_0$ ont la puissance du continu unidimensionnel. » C'est ainsi que *tout le contenu* de l'article[3] du tome 84 du *Journal de Crelle*, p. 242, est dérivé *en quelques lignes* de manière purement algébrique à partir des *formules fondamentales du calcul des puissances*.

§ 5.
LES NOMBRES CARDINAUX FINIS

Il faut avant tout montrer comment les principes exposés, sur lesquels sera édifiée plus tard la théorie des nombres cardinaux infinis actuels ou transfinis, fournissent aussi le fondement le plus naturel, le plus court et le plus rigoureux de la théorie des nombres finis.

À une chose isolée, si nous la subsumons sous le concept d'un ensemble $E_0 = (e_0)$, correspond comme nombre cardinal ce que nous appelons « un » et désignons par 1 ; nous avons

(1) $$1 = \overline{\overline{E_0}}\,.$$

Si on adjoint maintenant à E_0 une autre chose e_1, l'ensemble-réunion est dit E_1, de sorte que

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1).$$

Le nombre cardinal de E_1 est dit « deux » et est désigné par 2

(3) $$2 = \overline{\overline{E_1}}\,.$$

Par adjonction de nouveaux éléments, nous obtenons la suite des ensembles

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots$$

qui nous fournit successivement, en une suite illimitée, les autres *nombres cardinaux*, dits *finis* et désignés par 3, 4, 5, … L'utilisation que nous faisons ici, à titre auxiliaire, des mêmes nombres comme indices est légitimé par cela qu'un nombre n'est employé avec cette signification qu'après avoir été défini comme nombre cardinal. Nous avons, si on entend par $n-1$ le prédécesseur immédiat du nombre n dans cette suite

(4) $$n = \overline{\overline{E_{n-1}}}\,,$$

(5) $$E_n = (E_{n-1}, e_n) = (e_0, e_1, \ldots, e_n).$$

De la définition de la somme du § 3, il suit

(6) $$\overline{\overline{E_n}} = \overline{\overline{E_{n-1}}} + 1,$$

c.-à-d. que tout nombre cardinal (autre que 1) est la somme de son prédécesseur immédiat et de 1.

Dans le cours de nos idées, passent maintenant au premier plan les trois théorèmes suivants :

A. « *Les termes de la suite illimitée de nombres cardinaux finis*

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

sont tous différents les uns des autres (c.-à-d. que la condition d'équivalence posée au § 1 n'est pas satisfaite par les ensembles correspondants). »

B. « *Chacun de ces nombres* n *est plus grand que ceux qui le précèdent et plus petit que ceux qui le suivent* (§ 2). »

---

3. [N.D.T.] Cantor, « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre », *Journal de Crelle* 84, 1878, p. 242-258 ; trad. française : « Une contribution à la théorie des ensembles », *Acta Mathematica* 2, 1883, p. 311-328.

C. « *Il n'y a aucun nombre cardinal qui, en grandeur, se trouve entre deux nombres voisins* n *et* $n+1$ (§ 2). »

Nous appuyons les démonstrations de ces théorèmes sur les deux suivants D et E, qu'il faut par conséquent tout d'abord prouver.

D. « *Si M est un ensemble tel que sa puissance n'est égale à aucune de ses parties, l'ensemble (M, e) qui naît de M par adjonction d'un nouvel unique élément e, a aussi la propriété d'avoir une puissance qui n'est égale à aucune de ses parties.* »[4]

E. « *Si N est un ensemble de nombre cardinal fini* n *et* N_1 *une partie quelconque de N, le nombre cardinal de* N_1 *est égal à l'un des nombres* $1, 2, 3, \dots n-1$. »

Démonstration de D. Si nous supposons que l'ensemble (M, e) a une puissance égale à l'une de ses parties, que nous appellerons N, il faut distinguer deux cas, qui conduisent l'un et l'autre à une contradiction :

1) L'ensemble N contient l'élément e ; soit $N = (M_1, e)$. M_1 est une partie de M, puisque N est une partie de (M, e). Comme nous l'avons vu au § 1, la loi de correspondance des deux ensembles équivalents (M, e) et (M_1, e) peut être modifiée de façon que l'élément e de l'un corresponde au même élément e de l'autre. Les ensembles M et M_1 se correspondent alors eux-mêmes aussi biunivoquement. Mais cela contredit l'hypothèse que M n'a pas une puissance égale à sa partie M_1.

2) Si la partie N de (M, e) ne contient pas l'élément e, N est soit M soit une partie de M. Par la loi de correspondance entre (M, e) et N qui sous-tend notre hypothèse, à l'élément e du premier peut correspondre l'élément f du second. Soit $N = (M_1, f)$; alors l'ensemble M se trouve simultanément en correspondance biunivoque avec M_1. Mais M_1, comme partie de N, est aussi dans tous les cas une partie de M. M serait aussi ici équivalent à une de ses parties, à l'encontre de l'hypothèse.

Démonstration de E. Il sera supposé l'exactitude du théorème jusqu'à un certain n et conclu alors comme suit à sa validité pour le suivant $n+1$.

Comme ensemble de nombre cardinal $n+1$ a été posé $E_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$. Si le théorème est exact pour cet ensemble, sa validité suit immédiatement (§ 1) pour tout autre ensemble de même nombre cardinal $n+1$. Soit E' une partie quelconque de E_n ; nous distinguons les cas suivants :

1) E' ne contient pas l'élément e_n, alors E_n est soit E_{n-1} soit une partie de E_{n-1} ; il a alors pour nombre cardinal soit n soit un des nombres $1, 2, 3, \dots, n-1$, puisque nous supposons notre théorème exact pour l'ensemble E_{n-1} de nombre cardinal n.

2) E' consiste en l'unique élément e_n, alors $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' consiste en e_n et un ensemble E'', de sorte que $E' = (E'', e_n)$. E'' est une partie de E_{n-1} et a donc pour nombre cardinal, conformément à l'hypothèse, un des nombres $1, 2, 3, \dots, n-1$.

Mais comme $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, E' a par conséquent pour nombre cardinal un des nombres $2, 3, \dots, n$.

Démonstration de A Chacun des ensembles que nous avons désignés par E_n a la propriété de n'être équivalent à aucune de ses parties. Car si on suppose que cela est exact pour un certain n, il suit du théorème D que cela l'est aussi pour le suivant $n+1$.

Mais pour $n=1$, on reconnaît immédiatement que l'ensemble $E_1 = (e_0, e_1)$ n'est équivalent à aucune de ses parties, qui sont ici (e_0) et (e_1).

---

4. [N.D.T.] L'énoncé de ce théorème est incorrect. Cantor y parle à deux reprises d'une égalité entre puissance d'un ensemble et partie de cet ensemble, alors qu'il veut parler d'une égalité entre puissance d'un ensemble et puissance d'une partie de cet ensemble. La même faute réapparaît dans la démonstration.

Si nous considérons maintenant deux nombres quelconques m et n de la suite 1, 2, 3, …, où m précède n, alors E_{m-1} est une partie de E_{n-1} ; E_{m-1} et E_{n-1} ne sont par conséquent pas équivalents et leurs nombres cardinaux $m = \overline{\overline{E_{m-1}}}$ et $n = \overline{\overline{E_{n-1}}}$ ne sont donc pas égaux.

Démonstration de B. Si des deux nombres cardinaux finis m et n, le premier précède le second, alors $m < n$. En effet, si nous considérons les deux ensembles $M = \overline{\overline{E_{m-1}}}$ et $N = \overline{\overline{E_{n-1}}}$, ils satisfont à chacune des deux conditions du §2 pour $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$. La condition 1) est satisfaite, puisque d'après le théorème E, une partie de $M = E_{m-1}$ ne peut avoir qu'un des nombres cardinaux 1, 2, 3, …, $m-1$, donc d'après le théorème A, être équivalent à l'ensemble $N = E_{n-1}$. La condition 2) est satisfaite puisque ici M lui-même est une partie de N.

Démonstration de C. Soit a un nombre cardinal plus petit que $n+1$. En vertu de la condition 2) du § 2, il y a une partie de E_n de nombre cardinal a. D'après le théorème E, une partie de E_n ne peut avoir pour nombre cardinal que 1, 2, 3, …, n.

a est donc égal à l'un des nombres 1, 2, 3, …, n.

D'après le théorème B, aucun d'eux n'est plus grand que n.

Par suite, il n'y a aucun nombre cardinal a qui soit plus petit que $n+1$ et plus grand que n.

Le théorème suivant est très important pour la suite :

F. « *Si K est un ensemble quelconque de nombres cardinaux finis distincts, il y en a un parmi eux, χ_1, qui est plus petit que les autres et est donc le plus petit de tous.* »

Démonstration. Soit l'ensemble K contient le nombre 1, qui est alors le plus petit et $\chi_1 = 1$, soit non. Dans ce dernier cas, soit J la collection de *tous* les nombres cardinaux de notre suite 1, 2, 3, …, qui sont plus petits que ceux de K. Si un nombre n appartient à J, tous les nombres $< n$ appartiennent aussi à J. Mais J doit contenir un élément n_1 tel que $n_1 + 1$ et par suite aussi tous les nombres plus grands n'appartiennent pas à J, puisque sinon J contiendrait la totalité de tous les nombres finis, alors que les nombres appartenant à K ne sont pourtant pas contenus dans J. J n'est donc rien d'autre que le segment (1, 2, 3, …, n_1). Le nombre $n_1 + 1$ est nécessairement un élément de K et il est plus petit que les autres.

De F on déduit :

G. « *Tout ensemble $K = \{\chi\}$ de nombres cardinaux finis distincts peut être mis sous la forme d'une suite*

$$K = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots)$$

telle que

$$\chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \ldots$$ »

§ 6.
LE PLUS PETIT NOMBRE CARDINAL TRANSFINI ALEPH-ZÉRO

Les ensembles dont le nombre cardinal est fini sont dits « *ensembles finis* » ; nous appellerons tous les autres « *ensembles transfinis* » et leurs nombres cardinaux « *nombres cardinaux transfinis* ».

La totalité de *tous les nombres cardinaux finis* n nous offre l'exemple le plus immédiat d'ensemble transfini ; nous appellerons son nombre cardinal (§ 1) « *aleph-zéro* », en signe $\aleph_0$, que nous définissons donc par

(1) $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{n\}}}.$$

Que $\aleph_0$ est un nombre *transfini*, c.-à-d. qu'il n'est *égal à aucun nombre fini*, suit du simple fait que, si on adjoint à l'ensemble $\{n\}$ un nouvel élément e_0, l'ensemble-réunion $(\{n\}, e_0)$ est équivalent à l'ensemble originel $\{n\}$. On peut en effet imaginer entre les deux la correspondance biunivoque par laquelle à l'élément e_0 du premier correspond l'élément 1 du second, à l'élément n du premier l'élément $n+1$ de l'autre. D'après le §3, nous avons par conséquent

(2) $$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Mais il a été montré au §5 que $m+1$ est toujours différent de m, donc $\aleph_0$ n'est égal à aucun nombre fini m.

Le nombre $\aleph_0$ *est plus grand que tout nombre fini* m :

(3) $$\aleph_0 > m.$$

Cela résulte, compte tenu du §3, de ce que $m = \overline{\overline{(1, 2, 3, \dots m)}}$, de ce qu'aucune partie de l'ensemble $(1, 2, 3, \dots, m)$ n'est équivalente à l'ensemble $\{n\}$ et de ce que $(1, 2, 3, \dots, m)$ est lui-même une partie de $\{n\}$.

D'autre part, $\aleph_0$ est *le plus petit nombre cardinal transfini*.

Si a est un nombre cardinal transfini quelconque différent de $\aleph_0$, on a toujours

(4) $$\aleph_0 < \mathfrak{a}.$$

Cela repose sur les théorèmes suivants :

A. « *Tout ensemble transfini T a des parties de nombre cardinal* $\aleph_0$. »

Démonstration. Si on sépare de T, selon une règle quelconque, un nombre fini d'éléments $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$, il reste toujours la possibilité d'en retirer un de plus t_n. L'ensemble $\{t_n\}$, où n désigne un nombre cardinal fini arbitraire, est une partie de T de nombre cardinal $\aleph_0$, puisque $\{t_n\} \sim \{n\}$ (§ 1).

B. « *Si S est un ensemble transfini de nombre cardinal* $\aleph_0$, *S_1 une partie transfinie quelconque de S, on a aussi* $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$. »

Démonstration. Supposons que $S \sim \{n\}$. Si nous désignons par s_n l'élément de S associé à l'élément n de $\{n\}$ sur la base d'une loi de correspondance entre ces deux ensembles, alors

$$S = \{s_n\}.$$

La partie S_1 de S consiste en certains éléments s_c de S, et la totalité de tous les nombres c forme une partie transfinie K de l'ensemble $\{n\}$. D'après le théorème G, § 5, l'ensemble K peut être mis sous la forme d'une suite

$$K = \{c_n\},$$

où $$c_n < c_{n+1},$$

par suite, on a aussi

$$S_1 = \{s_{c_n}\}.$$

Il s'ensuit que $S_1 \sim S$ et donc que $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

De A et B résulte la formule (4), compte tenu du § 2.

On conclut de (2), en ajoutant 1 des deux côtés

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

et, en itérant,

(5) $$\aleph_0 + n = \aleph_0.$$

Mais nous avons aussi

(6) $$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

En effet, d'après (1) §3, $\aleph_0 + \aleph_0$ est le nombre cardinal $\overline{\overline{(\{a_n\}, \{b_n\})}}$, puisque

$$\overline{\overline{\{a_n\}}} = \overline{\overline{\{b_n\}}} = \aleph_0$$

Or on a évidemment

$$\{n\} = (\{2n-1\}, \{2n\}),$$
$$(\{2n-1\}, \{2n\}) \sim (\{a_n\}, \{b_n\}),$$

donc

$$\overline{\overline{(\{a_n\}, \{b_n\})}} = \overline{\overline{\{n\}}} = \aleph_0 .$$

L'égalité (6) peut aussi s'écrire :

$$\aleph_0 \,.\, 2 = \aleph_0$$

et, en ajoutant plusieurs fois $\aleph_0$ des deux côtés, on trouve que

(7) $$\aleph_0 \,.\, n = n \,.\, \aleph_0 = \aleph_0.$$

Mais nous avons aussi

(8) $$\aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0.$$

Démonstration. D'après (6) du §3, $\aleph_0 \,.\, \aleph_0$ est le nombre cardinal de l'ensemble-liaison

$$\{(m, n)\},$$

où m et n sont deux nombres cardinaux finis arbitraires, indépendants l'un de l'autre. Si l est aussi un nombre cardinal fini arbitraire (de sorte que $\{l\}$, $\{m\}$ et $\{n\}$ ne sont que des manières différentes de désigner la même totalité de tous les nombres cardinaux finis), nous devons montrer que

$$\{(m, n)\} \sim \{l\}.$$

Si nous désignons $m+n$ par r, alors r prend toutes les valeurs numériques 2, 3, 4, …, et il y a en tout $r-1$ éléments (m, n) pour lesquels $m+n=r$, à savoir :

$$(1, r-1), \quad (2, r-2), \quad \ldots \quad (r-1, 1).$$

Si, dans cette succession, on pose tout d'abord l'élément (1, 1) pour lequel $r=2$, puis les deux éléments pour lesquels $r=3$, puis les trois éléments pour lesquels $r=4$, etc., on obtient tous les éléments (m, n) sous forme d'une suite simple :

$$(1, 1)\,;\ (1, 2), (2, 1)\,;\quad (1, 3), (2, 2), (3, 1)\,;\quad (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

et l'élément (m, n) apparaît ici, comme on le voit facilement, à la l^{e} place, où

(9) $$l = m + \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}.$$

l prend chacune des valeurs numériques 1, 2, 3, … une fois ; il existe donc, en vertu de (9), une relation biunivoque entre les deux ensembles $\{l\}$ et $\{(m, n)\}$.

Si on multiplie les deux côtés de l'égalité (8) par $\aleph_0$, on obtient $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$ et, par multiplication répétée par $\aleph_0$, l'égalité satisfaite par tout nombre cardinal fini n :

(10) $$\aleph_0^{\,n} = \aleph_0.$$

Les théorèmes E et A du §5 mènent au théorème sur les ensembles *finis* :

C. « *Tout ensemble fini E est tel qu'il n'est équivalent à aucune de ses parties.* »

Ce théorème est précisément opposé au suivant, relatif aux ensembles *transfinis* :

D. « *Tout ensemble transfini T est tel qu'il a des parties T_1 qui lui sont équivalentes.* »

Démonstration. D'après le théorème A de ce paragraphe, il y a une partie $S = \{t_n\}$ de T dont le nombre cardinal est $\aleph_0$. Soit $T = (S, U)$, de sorte que U est composé des éléments de T qui sont distincts des éléments t_n. Si nous posons $S_1 = \{t_{n+1}\}$ et $T_1 = (S_1, U)$, alors T_1 est une partie de T, à savoir celle résultant de T par séparation de l'unique élément t_1. Comme $S \sim S_1$ (théorème B de ce paragraphe) et $U \sim U$, on a aussi (§1) $T \sim T_1$.

Ces théorèmes C et D mettent le plus distinctement en lumière la différence essentielle entre les ensembles finis et transfinis, que j'indiquais déjà en 1877 dans le tome 84 du *Journal de Crelle*, p. 242[5].

Après que nous avons introduit le plus petit nombre cardinal transfini $\aleph_0$ et dérivé ses propriétés les plus immédiates, se pose la question des nombres cardinaux supérieurs et de leur engendrement à partir de $\aleph_0$.

On montrera que les nombres cardinaux transfinis peuvent être ordonnés selon leur grandeur et forment, dans cet ordre, comme les nombres cardinaux finis, quoiqu'en un sens plus étendu, un « *ensemble bien ordonné* ».

De $\aleph_0$ naît, d'après une loi déterminée, le nombre cardinal *immédiatement supérieur* $\aleph_1$; de ce dernier, d'après la même loi, le nombre cardinal *immédiatement supérieur* $\aleph_2$, et ainsi de suite.

Mais la suite illimitée de nombres cardinaux

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots,\ \aleph_n,\ \ldots$$

n'épuise pas le concept de nombre cardinal transfini. Nous prouverons l'existence d'un nombre cardinal que nous désignerons par $\aleph_\omega$ et qui se présente comme le nombre cardinal *immédiatement supérieur à tous les* $\aleph_n$; de ce dernier naît, de la même manière que $\aleph_1$ de $\aleph_0$, un nombre cardinal immédiatement supérieur $\aleph_{w+1}$, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour *tout nombre cardinal transfini* a, il y en a un *immédiatement supérieur*, qui en résulte d'après une loi uniforme ; mais aussi, pour tout ensemble {a} illimité, croissant et bien ordonné de nombres cardinaux transfinis a, il y en a un *immédiatement supérieur*, qui en résulte de manière uniforme.

Pour un fondement rigoureux de ce qui fut découvert en 1882 et énoncé dans l'ouvrage *Grundlagen einer allgemein Mannigfaltigkeitslehre* et le tome 21 des *Mathematische Annalen*[6], nous nous servirons de ce que nous appelons les « *types d'ordre* », dont nous devons tout d'abord exposer la théorie dans les paragraphes suivants.

5. [N.D.T.] Cantor, « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre », *Journal de Crelle* 84, 1878, p. 242-258 ; trad. française : « Une contribution à la théorie des ensembles », *Acta Mathematica* 2, 1883, p. 311-328.

6. [N.D.T.] La première référence est la publication sous forme d'ouvrage de l'article mentionné dans la seconde : *Grundlagen einer allgemein Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig, Teubner, 1883 pour l'ouvrage ; « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten », *Mathematische Annalen* 21, 1883, p. 545-586 pour l'article. Trad. françaises partielles : *Acta Mathematica* 2, 1883, p. 381-408 ; *Cahiers pour l'analyse* 10, 1969, p. 35-52.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo.“

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.“

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.“

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil‘ oder ‚Theilmenge‘ einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit‘ zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl‘ nennen.

‚Mächtigkeit‘ oder ‚Cardinalzahl‘ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

(3) $$\overline{\overline{M}}.$$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins' wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir ‚äquivalent' und bezeichnen dies mit

(4) $$M \sim N \quad \textit{oder} \quad N \sim M,$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

Jedem Theil M_1 von M entspricht alsdann ein bestimmter äquivalenter Theil N_1 von N und umgekehrt.

Hat man ein solches Zuordnungsgesetz zweier äquivalenten Mengen, so lässt sich dasselbe (abgesehen von dem Falle, dass jede von ihnen aus nur einem Elemente besteht) mannigfach modificiren. Namentlich kann stets die Vorsorge getroffen werden, dass einem besonderen Elemente m_0 von M irgend ein besonderes Element n_0 von N entspricht. Denn entsprechen bei dem anfänglichen Gesetze die Elemente m_0 und n_0 noch nicht einander, vielmehr dem Elemente m_0 von M das Element n_1 von N, dem Elemente n_0 von N das Element m_1 von M, so nehme man das modificirte Gesetz, wonach m_0 und n_0 und ebenso m_1 und n_1 entsprechende Elemente beider Mengen werden, an den übrigen Elementen jedoch das erste Gesetz erhalten bleibt. Hierdurch ist jener Zweck erreicht.

Jede Menge ist sich selbst äquivalent:

(5) $$M \sim M.$$

Sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent:

(6) $$\textit{aus} \quad M \sim P \quad \textit{und} \quad N \sim P \quad \textit{folgt} \quad M \sim N.$$

Von fundamentaler Bedeutung ist es, *dass zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Cardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind:*

(7) $$\textit{aus} \quad M \sim N \quad \textit{folgt} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}},$$

und

(8) $$\textit{aus} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad \textit{folgt} \quad M \sim N.$$

Die Aequivalenz von Mengen bildet also das nothwendige und untrügliche Criterium für die Gleichheit ihrer Cardinalzahlen.

In der That bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituirt wird.

Ist nun $M \sim N$, so liegt ein Zuordnungsgesetz zu Grunde, durch welches M und N gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sind; dabei entspreche dem Elemente m von M das Element n von N. Wir können uns alsdann an Stelle jedes Elementes m von M das entsprechende Element n von N substituirt denken, und es verwandelt sich dabei M in N ohne Aenderung der Cardinalzahl; es ist folglich

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Die Umkehrung des Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss besteht. Denn es wächst gewissermassen, wie wir sahen, $\overline{\overline{M}}$ so aus M heraus, dass dabei aus jedem Elemente m von M eine besondere Eins von $\overline{\overline{M}}$ wird. Wir können daher sagen, dass

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Ebenso ist $N \sim \overline{\overline{N}}$. Ist also $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, so folgt nach (6) $M \sim N$.

Wir heben noch den aus dem Begriff der Aequivalenz unmittelbar folgenden Satz hervor:

Sind $M, N, P, \ldots$ Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben, $M', N', P', \ldots$ ebensolche jenen entsprechende Mengen, und ist

$$M \sim M', \; N \sim N', \; P \sim P', \ldots,$$

so ist auch immer

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.

Das ‚Grösser' und ‚Kleiner' bei Mächtigkeiten.

Sind bei zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ und $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ die *zwei* Bedingungen erfüllt:

1) *es giebt keinen Theil von M, der mit N äquivalent ist,*

2) *es giebt einen Theil N_1 von N, so dass $N_1 \sim M$,*

so ist zunächst ersichtlich, dass dieselben erfüllt bleiben, wenn in ihnen M und N durch zwei denselben äquivalente Mengen M' und N' ersetzt werden; *sie drücken daher eine bestimmte Beziehung der Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu einander aus.*

Ferner *ist die Aequivalenz von* M *und* N, *also die Gleichheit von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ausgeschlossen;* denn wäre $M \sim N$, so hätte man, weil $N_1 \sim M$, auch $N_1 \sim N$ und es müsste wegen $M \sim N$ auch ein Theil M_1 von M existiren, so dass $M_1 \sim M$, also auch $M_1 \sim N$ wäre, was der Bedingung 1) widerspricht.

Drittens *ist die Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *eine solche, dass sie dieselbe Beziehung von* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *unmöglich macht;* denn wenn in 1) und 2) die Rollen von M und N vertauscht werden, so entstehen daraus zwei Bedingungen, die jenen contradictorisch entgegengesetzt sind.

Wir drücken die durch 1) *und* 2) *charakterisirte Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *so aus, dass wir sagen:* $\mathfrak{a}$ *ist kleiner als* $\mathfrak{b}$ *oder auch* $\mathfrak{b}$ *ist grösser als* $\mathfrak{a}$, in Zeichen:

$$(1) \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}.$$

Man beweist leicht, dass

$$(2) \qquad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{dann immer} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Ebenso folgt ohne Weiteres aus jener Definition, dass, *wenn* P_1 *Theil einer Menge* P *ist, aus* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}_1$ *immer auch* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *und aus* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *immer auch* $\overline{\overline{P}}_1 < \mathfrak{b}$ *sich ergiebt.*

Wir haben gesehen, dass von den drei Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

jede einzelne die beiden anderen ausschliesst.

Dagegen versteht es sich keineswegs von selbst und dürfte an dieser Stelle unseres Gedankenganges kaum zu beweisen sein, dass bei irgend zwei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *eine von jenen drei Beziehungen nothwendig realisirt sein müsse.*

Erst später, wenn wir einen Ueberblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Cardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden, wird sich die Wahrheit des Satzes ergeben:

A. „*Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Cardinalzahlen, so ist entweder* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$."

Auf's Einfachste lassen sich aus diesem Satze die folgenden ableiten, von denen wir aber vorläufig keinerlei Gebrauch machen dürfen:

B. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *so beschaffen, dass* M *mit einem Theil* N_1 *von* N *und* N *mit einem Theil* M_1 *von* M *äquivalent ist, so sind auch* M *und* N *äquivalent.*"

C. „*Ist* M_1 *ein Theil einer Menge* M, M_2 *ein Theil der Menge* M_1, *und sind die Mengen* M *und* M_2 *äquivalent, so ist auch* M_1 *den Mengen* M *und* M_2 *äquivalent.*"

D. „*Ist bei zwei Mengen* M *und* N *die Bedingung erfüllt, dass* N *weder mit* M *selbst, noch mit einem Theile von* M *äquivalent ist, so giebt es einen Theil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist.*"

E. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *nicht äquivalent, und giebt es einen Theil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist, so ist kein Theil von* M *mit* N *äquivalent.*"

§ 3.

Die Addition und Multiplication von Mächtigkeiten.

Die Vereinigung zweier Mengen M und N, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, wurde in § 1, (2) mit (M, N) bezeichnet. Wir nennen sie die „*Vereinigungsmenge von M und N*".

Sind M', N' zwei andere Mengen ohne gemeinschaftliche Elemente, und ist $M \sim M'$, $N \sim N'$, so sahen wir, dass auch

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Daraus folgt, dass die Cardinalzahl von (M, N) nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt.

Dies führt zur Definition der Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, indem wir setzen:

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Da im Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung der Elemente abstrahirt ist, so folgt ohne Weiteres

$$(2) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

und für je drei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$(3) \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$

Wir kommen zur Multiplication.

Jedes Element m einer Menge M lässt sich mit jedem Elemente n einer andern Menge N zu einem neuen Elemente (m, n) verbinden; für die Menge aller dieser Verbindungen (m, n) setzen wir die Bezeichnung $(M . N)$ fest. Wir nennen sie die „*Verbindungsmenge von M und N*". Es ist also

$$(4) \qquad (M . N) = \{(m, n)\}.$$

Man überzeugt sich, dass auch die Mächtigkeit von $(M . N)$ nur von den Mächtigkeiten $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt; denn ersetzt man die Mengen M und N durch die ihnen äquivalenten Mengen

$$M' = \{m'\} \quad \text{und} \quad N' = \{n'\}$$

und betrachtet man m, m' sowie n, n' als zugeordnete Elemente, so wird die Menge

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

dadurch in ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss zu $(M . N)$ gebracht, dass man (m, n) und (m', n') als einander entsprechende Elemente ansieht; es ist also

$$(5) \qquad (M' . N') \sim (M . N).$$

Wir definiren nun das Product $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$(6) \qquad \mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M . N)}}.$$

Eine Menge mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ lässt sich aus zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch nach folgender Regel herstellen: man gehe von der Menge N aus und ersetze in ihr jedes Element n durch eine Menge $M_n \sim M$; fasst man die Elemente aller dieser Mengen M_n zu einem Ganzen S zusammen, so sieht man leicht, dass

$$S \sim (M . N), \tag{7}$$

folglich

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} . \mathfrak{b} .$$

Denn wird bei irgend einem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze der beiden äquivalenten Mengen M und M_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n mit m_n bezeichnet, so hat man:

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

und es lassen sich daher die Mengen S und $(M . N)$ dadurch gegenseitig eindeutig auf einander beziehen, dass m_n und (m, n) als entsprechende Elemente angesehen werden.

Aus unseren Definitionen folgen leicht die Sätze:

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \mathfrak{b} . \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{b} . \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

weil

$$(M . N) \sim (N . M),$$

$$\big(M . (N . P)\big) \sim \big((M . N) . P\big),$$

$$\big(M . (N, P)\big) \sim \big((M . N), (M . P)\big) .$$

Addition und Multiplication von Mächtigkeiten unterliegen also allgemein dem commutativen, associativen und distributiven Gesetze.

§ 4.

Die Potenzirung von Mächtigkeiten.

Unter einer ‚*Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M*‘ oder einfacher ausgedrückt, unter einer ‚*Belegung von N mit M*‘ verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermassen eine eindeutige Function von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heisse ‚*Belegungsfunction* von n‘; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt.

Zwei Belegungen $f_1(N)$ und $f_2(N)$ heissen dann und nur dann gleich, wenn *für alle Elemente* n *von* N die Gleichung erfüllt ist:

$$(1) \qquad f_1(n) = f_2(n),$$

so dass, wenn auch nur für ein einziges besonderes Element $n = n_0$ diese Gleichung nicht besteht, $f_1(N)$ und $f_2(N)$ als verschiedene Belegungen von N charakterisirt sind.

Beispielsweise kann, wenn m_0 ein besonderes Element von M ist, festgesetzt sein, dass für alle n

$$f(n) = m_0$$

sei; dieses Gesetz constituirt eine besondere Belegung von N mit M.

Eine andere Art von Belegungen ergiebt sich, wenn m_0 und m_1 zwei verschiedene besondere Elemente von M sind, n_0 ein besonderes Element von N ist, durch die Festsetzung:

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

für alle n, die von n_0 verschieden sind.

Die Gesammtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet eine bestimmte Menge mit den Elementen $f(N)$; wir nennen sie die ‚*Belegungsmenge von* N *mit* M‘ und bezeichnen sie durch $(N\,|\,M)$. Es ist also:

$$(2) \qquad (N\,|\,M) = \{f(N)\}.$$

Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so findet man leicht, dass auch

$$(3) \qquad (N\,|\,M) \sim (N'\,|\,M').$$

Die Cardinalzahl von $(N\,|\,M)$ hängt also nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ ab; sie dient uns zur Definition der Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$(4) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N\,|\,M)}}.$$

Für drei beliebige Mengen M, N und P beweist man leicht die Sätze:

$$(5) \qquad \big((N\,|\,M).(P\,|\,M)\big) \sim \big((N, P)\,|\,M\big),$$

$$(6) \qquad \big((P\,|\,M).(P\,|\,N)\big) \sim \big(P\,|\,(M.N)\big),$$

$$(7) \qquad \big(P\,|\,(N\,|\,M)\big) \sim \big((P.N)\,|\,M\big),$$

aus denen, wenn $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, auf Grund von (4) und im Hinblick auf § 3, die für drei beliebige Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gültigen Sätze sich ergeben:

$$(8) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} . \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}},$$

$$(9) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} . \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}},$$

$$(10) \qquad (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}.\mathfrak{c}}.$$

Wie inhaltreich und weittragend diese einfachen auf die Mächtigkeiten ausgedehnten Formeln sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

Bezeichnen wir die Mächtigkeit des Linearcontinuums X (d. h. des Inbegriffs X aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) mit $\mathfrak{o}$, so überzeugt man sich leicht, dass sie sich unter anderm durch die Formel

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \tag{11}$$

darstellen lässt, wo über die Bedeutung von $\aleph_0$ der § 6 Aufschluss giebt.

In der That ist $2^{\aleph_0}$ nach (4) nichts anderes als die Mächtigkeit aller Darstellungen

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \qquad (\text{wo } f(\nu) = 0 \text{ oder } 1) \tag{12}$$

der Zahlen x im Zweiersystem. Beachten wir hierbei, dass jede Zahl x nur einmal zur Darstellung kommt, mit Ausnahme der Zahlen $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, die zweimal dargestellt werden, so haben wir, wenn wir die „abzählbare" Gesammtheit der letzteren mit $\{s_\nu\}$ bezeichnen, zunächst

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Hebt man aus X irgend eine „abzählbare" Menge $\{t_\nu\}$ heraus und bezeichnet den Rest mit X_1, so ist

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \ X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

mithin

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

also (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Aus (11) folgt durch Quadriren (nach § 6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

und hieraus durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

wo ν irgend eine endliche Cardinalzahl ist.

Erhebt man beide Seiten von (11) zur Potenz $\aleph_0$, so erhält man

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Da aber nach § 6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, so ist

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) haben aber keine andere Bedeutung als diese: „Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Continuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Continuums." Es wird also *der ganze Inhalt* der Arbeit im 84ten Bande des Crelle'schen Journals, pag. 242 *mit diesen wenigen Strichen* aus den *Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten* rein algebraisch abgeleitet.

§ 5.

Die endlichen Cardinalzahlen.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die dargelegten Principien, auf welchen später die Lehre von den actual unendlichen oder transfiniten Cardinalzahlen aufgebaut werden soll, auch die natürlichste, kürzeste und strengste Begründung der endlichen Zahlenlehre liefern.

Einem einzelnen Ding e_0, wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0 = (e_0)$ subsumiren, entspricht als Cardinalzahl das, was wir ‚Eins' nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben:

$$1 = \overline{\overline{E}}_0. \tag{1}$$

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1, die Vereinigungsmenge heisse E_1, so dass

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{2}$$

Die Cardinalzahl von E_1 heisst ‚Zwei' und wird mit 2 bezeichnet

$$2 = \overline{\overline{E}}_1. \tag{3}$$

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

welche in unbegrenzter Folge uns successive die übrigen, mit 3, 4, 5, ... bezeichneten, sogenannten *endlichen Cardinalzahlen* liefern. Die hierbei vorkommende hülfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indices rechtfertigt sich daraus, dass eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Cardinalzahl definirt worden ist. Wir haben, wenn unter $\nu - 1$ die der Zahl ν in jener Reihe nächstvorangehende verstanden wird,

$$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}, \tag{4}$$

$$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots e_\nu). \tag{5}$$

Aus der Summendefinition in § 3 folgt:

$$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1, \tag{6}$$

d. h. jede endliche Cardinalzahl (ausser 1) ist die Summe aus der nächst vorhergehenden und 1.

Bei unserm Gedankengange treten nun folgende drei Sätze in den Vordergrund:

A. „*Die Glieder der unbegrenzten Reihe endlicher Cardinalzahlen*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sind alle unter einander verschieden (d. h. die in § 1 aufgestellte Aequivalenzbedingung ist an den entsprechenden Mengen nicht erfüllt)".

B. „*Jede dieser Zahlen ν ist grösser, als die ihr vorangehenden und kleiner, als die auf sie folgenden* (§ 2).“

C. „*Es giebt keine Cardinalzahlen, welche ihrer Grösse nach zwischen zwei benachbarten ν und $\nu + 1$ lägen* (§ 2).“

Die Beweise dieser Sätze stützen wir auf die zwei folgenden D und E, welche daher zunächst zu erhärten sind.

D. „*Ist M eine Menge von solcher Beschaffenheit, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit hat, so hat auch die Menge (M, e), welche aus M durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elementes e hervorgeht, dieselbe Beschaffenheit, mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit zu haben.*“

E. „*Ist N eine Menge mit der endlichen Cardinalzahl ν, N_1 irgend eine Theilmenge von N, so ist die Cardinalzahl von N_1 gleich einer der vorangehenden Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.*“

Beweis von D. Nehmen wir an, es hätte die Menge (M, e) mit einer ihrer Theilmengen, wir wollen sie N nennen, gleiche Mächtigkeit, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die beide auf einen Widerspruch führen:

1) Die Menge N enthält e als Element; es sei $N = (M_1, e)$; dann ist M_1 ein Theil von M, weil N ein Theil von (M, e) ist. Wie wir in § 1 sahen, lässt sich das Zuordnungsgesetz der beiden äquivalenten Mengen (M, e) und (M_1, e) so modificiren, dass das Element e der einen demselben Element e der andern entspricht; alsdann sind von selbst auch M und M_1 gegenseitig eindeutig auf einander bezogen. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, dass M mit seinem Theile M_1 nicht gleiche Mächtigkeit hat.

2) Die Theilmenge N von (M, e) enthält e nicht als Element, so ist N entweder M oder ein Theil von M. Bei dem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze zwischen (M, e) und N möge das Element e der ersteren dem Elemente f der letzteren entsprechen. Sei $N = (M_1, f)$; dann wird gleichzeitig die Menge M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu M_1 gesetzt sein; M_1 ist aber als Theil von N jedenfalls auch ein Theil von M. Es wäre auch hier M einem seiner Theile äquivalent, gegen die Voraussetzung.

Beweis von E. Es werde die Richtigkeit des Satzes bis zu einem gewissen ν vorausgesetzt und dann auf die Gültigkeit für das nächstfolgende $\nu + 1$ wie folgt geschlossen.

Als Menge mit der Cardinalzahl $\nu + 1$ werde $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$ zu Grunde gelegt; ist der Satz für diese richtig, so folgt ohne Weiteres (§ 1) auch seine Gültigkeit für jede andere Menge mit derselben Cardinalzahl $\nu + 1$. Sei E' irgend ein Theil von E_ν; wir unterscheiden folgende Fälle:

1) E' enthält e_ν nicht als Element, dann ist E' entweder $E_{\nu-1}$

oder ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also zur Cardinalzahl entweder ν oder eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, weil wir ja unsern Satz als richtig für die Menge $E_{\nu-1}$ mit der Cardinalzahl ν voraussetzen.

2) E' besteht aus dem einzigen Element e_ν, dann ist $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' besteht aus e_ν und einer Menge E'', so dass $E' = (E'', e_\nu)$ E'' ist ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also vorausgesetztermassen zur Cardinalzahl eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Nun ist aber $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, daher hat E' zur Cardinalzahl eine der Zahlen $2, 3, \ldots \nu$.

Beweis von A. Jede der von uns mit E_ν bezeichneten Mengen hat die Beschaffenheit, mit keiner ihrer Theilmengen äquivalent zu sein. Denn nimmt man an, dass dies für ein gewisses ν richtig sei, so folgt aus dem Satze D dasselbe für das nächstfolgende $\nu + 1$.

Für $\nu = 1$ erkennt man aber unmittelbar, dass die Menge $E_1 = (e_0, e_1)$ keiner ihrer Theilmengen, die hier (e_0) und (e_1) sind, äquivalent ist.

Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen μ und ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und ist μ die frühere, ν die spätere, so ist $E_{\mu-1}$ eine Theilmenge von $E_{\nu-1}$; es sind daher $E_{\mu-1}$ und $E_{\nu-1}$ nicht äquivalent; die zugehörigen Cardinalzahlen $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ und $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ sind somit nicht gleich.

Beweis von B. Ist von den beiden endlichen Cardinalzahlen μ und ν die erste die frühere, die zweite die spätere, so ist $\mu < \nu$. Denn betrachten wir die beiden Mengen $M = E_{\mu-1}$ und $N = E_{\nu-1}$, so ist an ihnen jede der beiden Bedingungen in § 2 für $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ erfüllt. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil nach Satz E eine Theilmenge von $M = E_{\mu-1}$ nur eine von den Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ haben, also der Menge $N = E_{\nu-1}$ nach Satz A nicht äquivalent sein kann. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil hier M selbst ein Theil von N ist.

Beweis von C. Sei $\mathfrak{a}$ eine Cardinalzahl, die kleiner ist als $\nu + 1$. Wegen der Bedingung 2) des § 2 giebt es eine Theilmenge von E_ν mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$. Nach Satz E kommt einer Theilmenge von E_ν nur eine der Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ zu.

Es ist also $\mathfrak{a}$ gleich einer von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$.

Nach Satz B ist keine von diesen grösser als ν.

Folglich giebt es keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, die kleiner als $\nu + 1$ und grösser als ν wäre. —

Von Bedeutung für das Spätere ist folgender Satz:

F. „*Ist K irgend eine Menge von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen, so giebt es unter ihnen eine $\varkappa_1$, die kleiner als die übrigen, also die kleinste von allen ist.*“

Beweis. Die Menge K enthält entweder die Zahl 1, dann ist diese die kleinste, $\varkappa_1 = 1$; oder nicht. Im letzteren Falle sei J der Inbegriff *aller* derjenigen Cardinalzahlen unsrer Reihe $1, 2, 3, \ldots$, welche kleiner sind, als die in K vorkommenden. Gehört eine Zahl ν zu J, so gehören auch alle Zahlen $< \nu$ zu J. Es muss aber J ein Element ν_1 haben, so dass $\nu_1 + 1$ und folglich auch alle grösseren Zahlen nicht zu J gehören, weil sonst J die Gesammtheit aller endlichen Zahlen umfassen würde, während doch die zu K gehörigen Zahlen nicht in J enthalten sind. J ist also nichts anderes als der Abschnitt $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Die Zahl $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ ist nothwendig ein Element von K und kleiner als die übrigen.

Aus F schliesst man auf:

G. „*Jede Menge* $K = \{\varkappa\}$ *von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen lässt sich in die Reihenform*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

bringen, so dass

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots \text{“}$$

§ 6.

Die kleinste transfinite Cardinalzahl Alef-null.

Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen ‚*endliche Mengen*‘, alle anderen wollen wir ‚*transfinite Mengen*‘ und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen ‚*transfinite Cardinalzahlen*‘ nennen.

Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§ 1) ‚*Alef-null*‘, in Zeichen $\aleph_0$, definiren also

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Dass $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d. h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Thatsache, dass, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach § 3 haben wir daher:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

In § 5 wurde aber gezeigt, dass $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich.

Die Zahl $\aleph_0$ *ist grösser als jede endliche Zahl* μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

Dies folgt im Hinblick auf § 3 daraus, dass $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots \mu)}}$, kein Theil der Menge $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ äquivalent der Menge $\{\nu\}$ und dass $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ selbst ein Theil von $\{\nu\}$ ist.

Andrerseits ist $\aleph_0$ *die kleinste transfinite Cardinalzahl.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgend eine von $\aleph_0$ verschiedene transfinite Cardinalzahl, so ist immer

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Dies beruht auf folgenden Sätzen:

A. „*Jede transfinite Menge T hat Theilmengen mit der Cardinalzahl $\aleph_0$*“.

Beweis. Hat man nach irgend einer Regel eine endliche Zahl von Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ aus T entfernt, so bleibt stets die Möglichkeit, ein ferneres Element t_ν herauszunehmen. Die Menge $\{t_\nu\}$, worin ν eine beliebige endliche Cardinalzahl bedeutet, ist eine Theilmenge von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, weil $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. „*Ist S eine transfinite Menge mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, S_1 irgend eine transfinite Theilmenge von S, so ist auch $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*“

Beweis. Vorausgesetzt ist, dass $S \sim \{\nu\}$; bezeichnen wir, unter Zugrundelegung eines Zuordnungsgesetzes zwischen diesen beiden Mengen, mit s_ν dasjenige Element von S, welches dem Elemente ν von $\{\nu\}$ entspricht, so ist

$$S = \{s_\nu\}.$$

Die Theilmenge S_1 von S besteht aus gewissen Elementen $s_\varkappa$ von S und die Gesammtheit aller Zahlen $\varkappa$ bildet einen transfiniten Theil K der Menge $\{\nu\}$. Nach Satz G, § 5 lässt sich die Menge K in die Reihenform bringen

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

wo

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

folglich ist auch

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Daraus folgt, dass $S_1 \sim S$, mithin $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$. —

Aus A und B ergiebt sich die Formel (4) im Hinblick auf § 2.

Aus (2) schliesst man durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

und indem man diese Betrachtung wiederholt,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Denn nach (1) § 3 ist $\aleph_0 + \aleph_0$ die Cardinalzahl $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, weil

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Nun hat man offenbar

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

also

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Die Gleichung (6) kann auch so geschrieben werden:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$$

und, indem man zu beiden Seiten wiederholt $\aleph_0$ addirt, findet man, dass

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{8}$$

Beweis. Nach (6) des § 3 ist $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ die der Verbindungsmenge

$$\{(\mu, \nu)\}$$

zukommende Cardinalzahl, wo μ und ν unabhängig von einander zwei beliebige endliche Cardinalzahlen sind. Ist auch λ Repräsentant einer beliebigen endlichen Cardinalzahl (so dass $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ und $\{\nu\}$ nur verschiedene Bezeichnungen für dieselbe Gesammtheit aller endlichen Cardinalzahlen sind), so haben wir zu zeigen, dass

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Bezeichnen wir $\mu + \nu$ mit ϱ, so nimmt ϱ die sämmtlichen Zahlenwerthe $2, 3, 4, \ldots$ an, und es giebt im Ganzen $\varrho - 1$ Elemente (μ, ν), für welche $\mu + \nu = \varrho$, nämlich diese:

$$(1, \varrho - 1), (2, \varrho - 2), \ldots (\varrho - 1, 1).$$

In dieser Reihenfolge denke man sich zuerst das eine Element (1, 1) gesetzt, für welches $\varrho = 2$, dann die beiden Elemente, für welche $\varrho = 3$, dann die drei Elemente, für welche $\varrho = 4$ u. s. w., so erhält man sämmtliche Elemente (μ, ν) in einfacher Reihenform:

$$(1, 1);\ (1, 2), (2, 1);\ (1, 3), (2, 2), (3, 1);\ (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

und zwar kommt hier, wie man leicht sieht, das Element (μ, ν) an die λ^{te} Stelle, wo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

λ nimmt jeden Zahlwerth $1, 2, 3, \ldots$ einmal an; es besteht also vermöge (9) eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\lambda\}$ und $\{(\mu, \nu)\}$. —

Werden die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $\aleph_0$ multiplicirt, so erhält man $\aleph_0{}^3 = \aleph_0{}^2 = \aleph_0$ und durch wiederholte Multiplication mit $\aleph_0$ die für jede endliche Cardinalzahl ν gültige Gleichung:

(10) $$\aleph_0{}^\nu = \aleph_0 .$$

Die Sätze E und A des § 5 führen zu dem Satze über *endliche* Mengen:

C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen äquivalent ist.*“

Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber:

D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, dass sie Theilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind.*“

Beweis. Nach Satz A dieses Paragraphen giebt es eine Theilmenge $S = \{t_\nu\}$ von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$. Sei $T = (S, U)$, so dass U aus denjenigen Elementen von T zusammengesetzt ist, welche von den Elementen t_ν verschieden sind. Setzen wir $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, so ist T_1 eine Theilmenge von T und zwar die durch Fortlassung des einzigen Elementes t_1 aus T hervorgehende. Da $S \sim S_1$ (Satz B dieses Paragraphen) und $U \sim U$, so ist auch (§ 1) $T \sim T_1$.

In diesen Sätzen C und D tritt die wesentliche Verschiedenheit von endlichen und transfiniten Mengen am Deutlichsten zu Tage, auf welche bereits im Jahre 1877 im 84sten Bande des Crelle'schen Journals pag. 242 hingewiesen wurde.

Nachdem wir die kleinste transfinite Cardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet haben, entsteht die Frage nach den höheren Cardinalzahlen und ihrem Hervorgang aus $\aleph_0$.

Es soll gezeigt werden, dass die transfiniten Cardinalzahlen sich nach ihrer Grösse ordnen lassen und in dieser Ordnung, wie die endlichen, jedoch in einem erweiterten Sinne, eine ‚*wohlgeordnete Menge*‘ bilden.

Aus $\aleph_0$ geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrössere* Cardinalzahl $\aleph_1$, aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrössere* $\aleph_2$ hervor und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Cardinalzahl. Es wird die Existenz einer Cardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit $\aleph_\omega$ bezeichnen und welche sich als die zu *allen* $\aleph_\nu$ *nächstgrössere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie $\aleph_1$ aus $\aleph_0$ eine nächstgrössere $\aleph_{\omega+1}$ hervor und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder transfiniten Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ giebt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrössere;* aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ giebt es eine *nächstgrössere*, einheitlich daraus hervorgehende.

Zur strengen Begründung dieses im Jahre 1882 gefundenen und in dem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883", sowie im XXI. Bande der Math. Annalen ausgesprochenen Sachverhaltes bedienen wir uns der sogenannten ‚*Ordnungstypen*', deren Theorie wir zunächst in den folgenden Paragraphen auseinander zu setzen haben.