QUESTIONS PROPOSEES.

Théorèmes appartenant à la géométrie de la règle.

I. SOIENT pris arbitrairement, soit sur un plan, soit dans l'espace, n points que l'on numérotera et désignera par (1), (2), (3)....(n).

Soit joint chacun de ces points à celui qui porte le numéro immédiatement supérieur par $n-1$ droites indéfinies, dont chacune soit désignée par les deux points qui la déterminent en cette manière : $\overline{(1)(2)}$, $\overline{(2)(3)}$, $\overline{(3)(4)}$, ... $\overline{(n-1)(n)}$.

Sur la direction de chacune de ces droites, soit pris arbitrairement un point; et soit désigné chacun des $n-1$ points ainsi choisis par les numéros qui désignent la droite sur laquelle il se trouve situé; ainsi qu'il suit : (12), (23), (34), ...($n-1$, n).

Soient joints deux à deux, par des droites, ceux de ces points et des premiers dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces droites par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette manière $\overline{(1)(23)}$, $\overline{(12)(3)}$, $\overline{(2)(34)}$, $\overline{(23)(4)}$..... ; les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres se couperont en un certain point que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, l'intersection de $\overline{(1)(23)}$ avec $\overline{(12)(3)}$ sera désignée par (123); celle de $\overline{(2)(34)}$ avec $\overline{(23)(4)}$ le sera par (234); et ainsi de suite; et ces nouveaux points seront un nombre de $n-2$.

Soient de même joints deux à deux, par des droites, ceux des points de ces trois séries dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre, ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces nouvelles droites par l'ensemble des indices des deux points qui auront servi à les déterminer en cette manière $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$, $\overline{(2)(345)}$, $\overline{(23)(45)}$, $\overline{(234)(5)}$, ...; il arrivera que les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquelles seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, se couperont en un même point, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection des trois droites $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$ sera simplement désignée par (1234), et ainsi des autres; ils seront au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des points, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et qui seront les points de concours de quatre droites; puis des points au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et qui seront des points de concours de cinq droites, et ainsi de suite; et enfin, un point unique qui sera le point de concours de $n-1$ droites, et sera désigné par $(123.....n)$.

II. Soient n droites arbitraires indéfinies numérotées dans un ordre quelconque et désignées par $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... $\overline{n}$, se coupant consécutivement. Désignons l'intersection de chaque droite avec celle qui porte le numéro immédiatement supérieur par l'ensemble de leurs indices, en cette manière $(\overline{1},\overline{2})$, $(\overline{2},\overline{3})$, $(\overline{3},\overline{4})$, ... $(\overline{n-1},\overline{n})$.

Par ces points d'intersection, soient menées des droites indéfinies, que nous désignerons simplement par l'ensemble des deux nombres qui forment l'indice de chacun d'eux, en cette manière : $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, ... $\overline{n-1}$, $\overline{n}$.

Considérons les intersections deux à deux, au nombre de $n-2$, de celles de ces droites dont les indices ne présentent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignés ces points par l'ensemble des indices des deux droites qui les déterminent en cette manière $(\overline{1},\overline{23})$, $(\overline{12},\overline{3})$, $(\overline{2},\overline{34})$, $(\overline{23},\overline{4})$.....; les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres appartiendront à certaines droites, au nombre de $n-2$, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite passant par $(\overline{1}, \overline{23})$ et $(\overline{12}, \overline{3})$ sera désignée par $\overline{123}$; celle qui passera par $(\overline{2}, \overline{34})$ et $(\overline{23}, \overline{4})$ sera désignée par $\overline{234}$; et ainsi des autres.

Soient de même considérées les intersections deux à deux de celles des droites de ces trois séries dont les indices ne portent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignés ces nouveaux points par l'ensemble des indices des deux droites qui auront servi à les déterminer, en cette manière $(\overline{1}, \overline{234})$, $(\overline{12}, \overline{34})$, $(\overline{1}, \overline{234})$, ...; il arrivera que les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquels seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, appartiendront à une même droite, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite qui contiendra les trois points $(\overline{1}, \overline{224})$, $(\overline{12}, \overline{34})$, $(\overline{123}, \overline{4})$ sera simplement désignée par $\overline{1234}$; les droites de cette série seront d'ailleurs au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des droites, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et sur chacune desquelles quatre points se trouveront situés ; puis des droites, au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et sur chacune desquelles cinq points se trouveront situés, et ainsi de suite; et enfin, une droite unique, sur laquelle $n-1$ points se trouveront situés; et qui sera désignée par $\overline{123......n}$.

Ces deux théorèmes ont également lieu sur la sphère, pourvu qu'on substitue aux droites des arcs de grands cercles, il arrive seulement que les points y sont, dans les mêmes circonstances, en nombre deux fois plus grand que sur un plan.

Problème d'analise algébrique.

Soit $X=0$ une équation numérique d'un degré quelconque, dont x soit l'inconnue.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

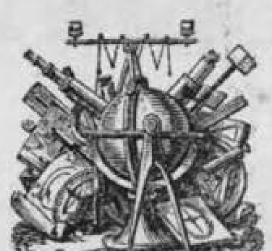
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

VINGT-QUATRIÈME CAHIER.

TOME XV.



Paris,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1835

MÉMOIRE

Sur la théorie des momens considérés comme analyse des rencontres des lignes droites ;

PAR G. CORIOLIS.

Dans un Mémoire composé en 1811 pour un concours à l'école des Ponts et Chaussées, j'ai indiqué comment, à l'aide de considérations statiques, on démontrait les deux modes de génération d'une surface gauche. Je crois qu'à cette époque on n'avait pas encore considéré les momens comme fournissant une analyse propre à résoudre certaines questions de la géométrie des rencontres. Depuis j'ai étendu ces considérations, et j'en ai déduit un assez grand nombre de théorèmes dont plusieurs ont été publiés en 1819 dans les *Annales de Mathématiques*. D'autres avaient déjà été donnés par des méthodes géométriques dans la *Théorie des transversales* de Carnot. Je me propose, dans cette note, de résumer ces recherches en présentant les principaux théorèmes qu'elles fournissent. Je le fais moins pour ces théorèmes en eux-mêmes que pour bien montrer l'essence de la théorie des momens (*).

On doit considérer dans les forces appliquées aux corps solides trois élémens : leur grandeur, leur direction, et leur position. La grandeur et la direction sont données ensemble très commodément par les

---

(*) M. Olivier, professeur à l'École des Arts et Manufactures et répétiteur à l'École Polytechnique, vient de me montrer un Traité publié en 1678 par Jean Céva, sous le titre de *De rectis lineis invicem secantibus statica constructio.* On voit par le titre même que cet ouvrage contient l'idée de ce petit Mémoire. Cependant, comme je n'ai trouvé dans l'auteur italien, parmi les propositions que je donne ici, que la neuvième et la deuxième appliquées au triangle, et que d'ailleurs l'impression et la planche de ce Mémoire étaient terminées, je n'ai pas cru devoir le retirer de ce Recueil.

trois projections rectangulaires ou obliques sur trois axes coordonnés. La position peut se donner de diverses manières, soit par les coordonnées d'un point par où passe la droite sur laquelle doit être située la force, soit par les trois momens de ces projections sur trois plans. Ces derniers élémens donnent directement les positions des trois projections. Cette manière de fixer la position d'une droite est certainement la plus simple quand on a déjà donné sa direction par les projections. Elle permet de ramener à des calculs de sommes les vérifications de toutes les conditions de position des droites. Ainsi, veut-on vérifier si une droite AR (fig. 3) passe par le point de rencontre de deux autres BP, CQ, tracées sur le même plan; il suffira de porter sur AR une longueur qui soit la diagonale des deux longueurs prises en BP et CQ : la condition de rencontre sera qu'en prenant un point quelconque M, et faisant les produits des longueurs AR, BP et QQ, par les perpendiculaires abaissées de M sur ces droites, le produit répondant à AR soit la somme ou la différence des produits répondans à BP et à CQ. Cette relation, dite des momens, est ainsi la manière la plus simple d'exprimer la condition de rencontre de AR avec les droites BP et QQ.

La condition de rencontre dans l'espace revenant à celle de rencontre sur trois plans, on l'exprimera de même par les équations des momens sur les trois plans.

On sent donc comment les conditions d'équilibre des forces appliquées à un corps solide, exigeant que les dernières résultantes se rencontrent, entraînent les équations des momens entre les composantes de ces forces sur les plans coordonnés.

Cette théorie des momens aurait pu être imaginée indépendamment de la statique et uniquement pour faciliter les recherches sur les rencontres des droites. C'est en effet au moyen des momens qu'on exprime le plus simplement possible la position d'une droite dans l'espace, sans introduire des quantités qui contiennent des élémens particuliers à certains points de la droite, et qui doivent disparaître dans tout ce qui se rapporte seulement à la position dans l'espace. Il y a dans les momens une symétrie qui n'existe pas dans les données de l'analyse des coordonnées. Ils ont en outre quelque chose de tout-à-fait spécial, puisque une fois qu'on a pris une longueur donnée sur la droite, ils constituent toute sa position et ne constituent que sa position, de telle sorte que ces deux choses changent ou ne changent pas simultanément.

Ces réflexions font sentir l'avantage de l'emploi de cette théorie pour l'analyse des questions de géométrie qui se rapportent aux positions des lignes droites. Nous allons en donner divers exemples.

1^er^ *théorème*. Si l'on conçoit dans l'espace (fig. 4) une suite de n points auxquels on donne les numéros de (1) à (n); si l'on joint ces points deux à deux dans l'ordre des numéros pour faire un polygone gauche ou plan non fermé, c'est-à-dire sans joindre le point (1) et le point (n). Si sur chaque côté ou sur son prolongement on prend comme on voudra un point, et qu'on le désigne par la réunion des numéros des points par où passe la droite sur laquelle il est pris, c'est-à-dire par (12), (23), (34), etc; si l'on joint les nouveaux points avec les premiers, on formera une nouvelle série de droites. Celles de ces droites qui joignent les points dont les indices réunis contiennent les trois mêmes numéros, se rencontreront. Si l'on désigne ces points de rencontre par ces trois numéros réunis, c'est-à-dire par (123), (345), (456), etc., on aura une nouvelle série de points à trois numéros. Si l'on joint ces points avec ceux des séries précédentes, il arrivera que celles de ces droites qui joindront des points dont les indices réunis contiennent les quatre ou cinq mêmes numéros, se rencontreront en un même point. Si l'on désigne ces points par ces quatre ou cinq numéros réunis, c'est-à-dire par (1234), (2345), etc., ou par (12345), (23456), etc., et que l'on continue de les joindre avec les points des séries précédentes, il arrivera toujours que les droites qui joindront des points dont les indices réunis contiendront les mêmes numéros, se couperont en un même point.

Le nombre des droites qui se couperont ainsi en un même point, sera égal à celui de ces numéros réunis moins un. Par exemple, on pourra tirer $n-1$ droites, réunissant des points dont les numéros réunis contiendront les chiffres 1, 2, 3, 4,..... n. Ces droites se couperont toutes en un seul point qu'on désigne ainsi par (123..... n).

La démonstration de ce théorème très général serait assez compliquée sans le secours de la théorie des momens; avec cette théorie elle se voit pour ainsi dire immédiatement.

En effet, si l'on regarde les points de la première série comme des points d'application de forces parallèles dont les rapports de grandeurs soient tels que chaque point de la seconde série soit le point d'application de la résultante des deux forces répondant aux deux numéros successifs de la première série, c'est-à-dire aux extrémités du côté sur lequel se trouve ce point de la seconde série; il est clair que chacune des deuxième, des troisième, des quatrième séries de droites contiendra le centre des premières forces appliquées aux points portant les numéros qui sont contenus dans la réunion des indices des deux points par où elles passent : elles devront donc se rencontrer au centre unique de ces forces parallèles.

Ce théorème, quand on l'applique à des points sur un plan, donne un moyen commode de vérifier l'exactitude que met un dessinateur au trait à tracer des lignes et à marquer leur rencontre; si toutefois il ne connaît pas l'énoncé ci-dessus. Pour cela on lui posera les points de la première série, puis on lui prescrira de les joindre, de poser ceux de la seconde série, et de les joindre à ceux de la première : on le fera continuer ainsi indéfiniment en lui laissant joindre à volonté les points de rencontre les uns avec les autres sans y mettre aucune condition. Alors il se trouvera toujours plusieurs des droites qu'il aura tirées qui devront se rencontrer au même point, s'il les a bien tracées et s'il a marqué avec précision les points de rencontre. C'est donc ce qu'on reconnaîtra d'un coup d'œil.

2^e *théorème*. Si l'on trace le dernier côté du polygone gauche, dont on vient de parler, c'est-à-dire si l'on joint le point (1) au point (n); qu'ensuite on joigne le point (1, 2, 3, 4,...... n) avec le point (2, 3, 4,..... $n-1$); la droite ainsi tracée ira couper le côté $(\overline{1, n})$

en un point qu'on désignera par (1, n). On aura ainsi un polygone fermé et un point sur chaque côté. Les segmens formés par ces points sur les côtés pourront se classer en deux séries dont chacune sera composée de ceux qui n'ont pas d'extrémité commune, ou, en d'autres termes, de ceux qui ne sont pas adjacens. Le produit de tous les segmens d'une série sera égal au produit des segmens de l'autre série.

Ce théorème résulte évidemment de ce que le dernier point (1, n) peut être considéré comme le centre des forces appliquées en (1) et en (n), et que ces forces sont entre elles comme les produits de tous les segmens non adjacens pour tous les côtés, excepté le dernier (1, n).

3ᵉ *théorème*. Si l'on coupe tous les côtés d'un même polygone gauche par un plan, ce qui donnera pour chaque côté deux segmens, on aura deux produits égaux en multipliant entre eux tous les segmens non adjacens.

Ce théorème, qui a été donné d'une autre manière par Carnot, résulte de ce que si les points de sections sont regardés comme des centres des premières forces prises deux à deux, le centre de gravité de toutes les forces sera dans le plan; il en sera de même du point (1, n) qui sur le côté $\overline{1, n}$ donne le centre des forces (1) et (n). Ainsi on a la relation indiquée dans le théorème précédent.

4ᵉ *théorème*. Si l'on prend des points sur une sphère, et qu'on les joigne par des arcs de grands cercles, on aura sur les rencontres de ces arcs ou des plans méridiens qui leur correspondent, un théorème tout analogue au théorème 1ᵉʳ. Il suffira, dans l'énoncé de ce dernier, de substituer aux droites les arcs de grands cercles ou leurs plans.

Cela se voit de suite en concevant des forces appliquées au centre de la sphère et passant par les points qu'on a choisis sur la surface, et en raisonnant sur la composition de ces forces comme on l'a fait précédemment pour des forces parallèles.

5ᵉ *théorème*. Le deuxième théorème sur les produits des segmens a son analogue sur une sphère, en substituant aux segmens leurs sinus.

En effet, ce sont ces sinus qui établissent les rapports entre les forces; ils auront donc les relations qu'ont les segmens quand il s'agit de polygone rectiligne.

6ᵉ *théorème*. Sur la double génération des surfaces gauches.

Si l'on prend quatre points M, N, P, Q, sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche ABCD (fig. 5), de telle manière qu'ils soient dans un même plan, c'est-à-dire qu'en joignant ces points par des droites MN, PQ, ces deux lignes se coupent en un point O; la proposition qu'il s'agit de démontrer, c'est que si l'on tire deux autres transversales M′N′ et P′Q′ touchant chacune les trois droites qui ne se coupent pas, ces transversales se rencontreront.

Appliquons ici les considérations du troisième théorème. La rencontre des transversales qui sont dans un même plan exige, en vertu de ce théorème, que le produit des segmens non adjacens soit égal au produit des quatre autres segmens, et réciproquement l'égalité de ces produits entraîne la rencontre de ces lignes. Or, pour la transversale M′N′ qui rencontrera PQ, on aura la relation énoncée plus haut entre les segmens formés par M′N′ et PQ dans le grand quadrilatère. Pour la transversale P′Q′ qui rencontrera MN, on aura aussi la relation analogue pour les segmens formés par MN et P′Q′. En comparant ces relations, il est facile de voir que par ces rapports égaux on en déduit une nouvelle relation analogue pour les segmens formés par les deux transversales M′N′, P′Q′; donc ces deux dernières se rencontrent. C'est la condition pour la double génération des surfaces gauches.

7ᵉ *théorème*. Si l'on prend un point intérieur dans un polygone plan, d'un nombre de côtés impair (fig. 6), qu'on joigne ce point avec tous les sommets, et qu'on prolonge chacune de ces droites jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé au sommet par où elle passe; on déterminera ainsi sur chaque côté deux segmens; les deux produits formés de tous les segmens non adjacens seront égaux.

En effet, concevons des forces en équilibre appliquées au point intérieur et dirigées vers les sommets; décomposons ensuite chacune d'elles en deux forces parallèles appliquées aux deux extrémités du côté opposé au sommet par lequel elle passe. Nous pourrons disposer des forces appliquées à chaque sommet, excepté pour le dernier, de manière que la résultante de ces deux composantes qu'on y trouve, passe par le point intérieur. Alors il faudra qu'en allant de proche en proche on arrive à ce que la première et la dernière composante, qui complètent l'équilibre, aient une résultante qui passe par le point intérieur. Cela étant, les sinus des angles qu'elles font avec la transversale qui doit être leur résultante, seront entre eux comme les produits des segmens non adjacens et des sinus des angles des forces concourantes. Or on reconnaît facilement que dans cette équation les sinus disparaissent, parce que la même série d'angles s'y présente dans les deux membres. Ainsi, il ne reste que les segmens dans la relation, qui devient ainsi celle de l'énoncé.

Dans un pentagone, par exemple, en désignant les forces appliquées aux sommets par (1), (2), (3), (4), (5); en représentant leurs composantes parallèles aux autres forces appliquées aux deux sommets opposés par F (13), F (14), etc.; les segmens sur les côtés par S (13), S (35), S (14), S (42), etc.; les angles par $(\widehat{13})$, $(\widehat{14})$, etc., on aura les relations

$$
\begin{aligned}
F(14)\ S\ (14) &= F(24)\ S\ (24),\\
F(24) \sin(\widehat{24}) &= F(25) \sin(\widehat{25}),\\
F(25)\ S\ (25) &= F(35)\ S\ (35),\\
F(35) \sin(\widehat{35}) &= F(31) \sin(\widehat{31}),\\
F(31)\ S\ (31) &= F(41)\ S\ (41),\\
F(41) \sin(\widehat{41}) &= F(42) \sin(\widehat{42}),\\
F(42)\ S\ (42) &= F(52)\ S\ (52),\\
F(52) \sin(\widehat{52}) &= F(53) \sin(\widehat{53}),\\
F(53)\ S\ (53) &= F(13)\ S\ (13),\\
F(13) \sin(\widehat{13}) &= F(14) \sin(\widehat{14}).
\end{aligned}
$$

En faisant les produits de ces équations, les forces et les sinus disparaissent, tandis que les segmens restent seuls. Cela tient à ce que l'ordre des numéros ne fait rien pour les angles, puisque $(\widehat{13}) = (\widehat{31})$, tandis qu'il fait pour les segmens, puisque S(13) n'est pas le même segment que S(31).

Pour un triangle, cette proposition peut s'établir d'une manière plus simple en suivant la marche du second théorème.

Carnot a donné le théorème précédent dans son Mémoire sur les transversales.

8ᵉ *théorème*. Si dans un polygone plan, d'un nombre de côtés pair ou impair (fig. 5), on prend un point intérieur, qu'on tire de ce point des droites aboutissant à tous les sommets, et qu'on prolonge chacune de celles-ci jusqu'à sa rencontre avec deux côtés de rang égal, à partir du sommet par où passe cette droite; on aura ainsi quatre segmens sur chaque côté. Il y aura entre ces segmens une relation semblable à celle du théorème précédent, à cela près qu'on devra substituer à chaque segment employé dans ce théorème précédent, le produit des deux segmens partant du même sommet et se terminant aux deux points de section sur le même côté.

On établira cette proposition comme la précédente, en suivant la même décomposition de forces, d'abord pour le premier système de segmens formés sur les côtés par les droites partant des sommets distans du même nombre de rangs de chacun de ces côtés, et ensuite pour le deuxième système de segmens formés par les droites partant des sommets de même rang dans un ordre inverse. En multipliant entre elles les relations des composantes, les sinus des angles disparaîtront, en sorte qu'il ne restera que les produits des segmens groupés, ainsi que l'indique l'énoncé.

On peut encore appliquer la théorie des momens à d'autres théorèmes donnés par Carnot. Par exemple:

9ᵉ *théorème* (fig. 7). Si l'on mène d'un point B des sécantes BA, BA_1, BA_2, BA_3, qui coupent une droite AA_3; et si l'on coupe ces sécantes par une droite CC_3; les deux diagonales des trapèzes CAC_1A_1, $C_2A_2C_3A_3$, se couperont en des points m, m_1, etc., qui seront sur une ligne droite aboutissant au point de rencontre D de AA_3 avec CC_3.

Pour le démontrer, plaçons en A, A_1, B, trois forces parallèles, dont m soit le centre de gravité; en A_2, A_3, B, trois autres forces parallèles dont m_1 soit le centre; ces dernières étant opposées aux précédentes, et les forces en B se détruisant : il ne restera que quatre forces en A, A_1, A_2, A_3, qui seront équivalentes aux deux forces m et m_1: la résultante est donc en D à la rencontre de AA_3 avec mm_1. Mais on peut avoir cette résultante par les forces en A_1, A_3, C et C_2; donc CC_2, rencontre AA_2 au même point D, ce qui établit la proposition énoncée.

Fig. (1) 2e mémoire.

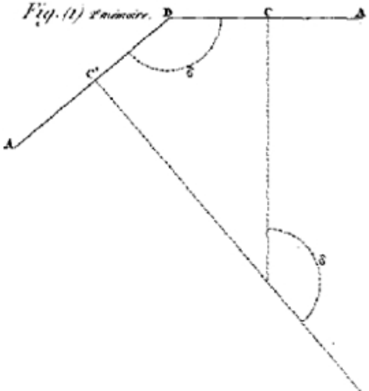


Fig. (3) 3e mémoire.

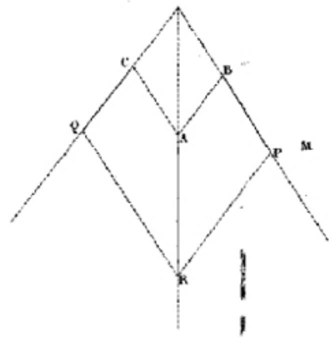


Fig. (4) 3e mémoire.

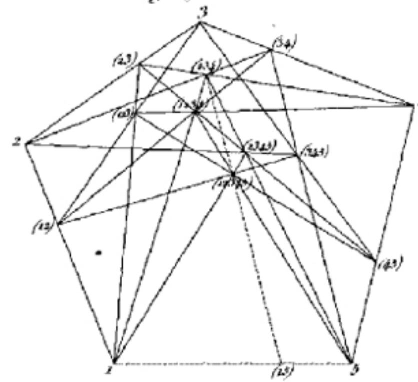


Fig. (2) 2e mémoire.

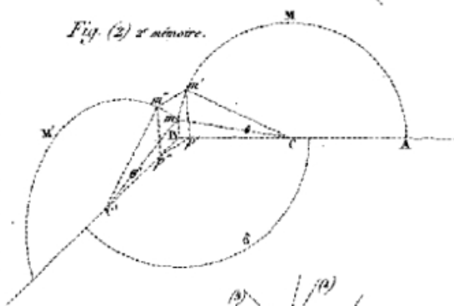


Fig. (5) 3e mémoire.

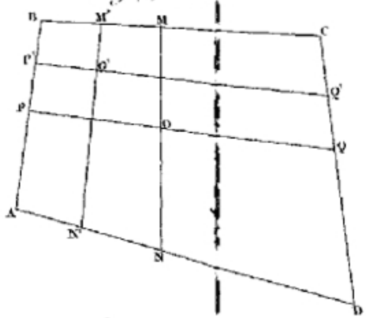


Fig. (8) 4e mémoire.

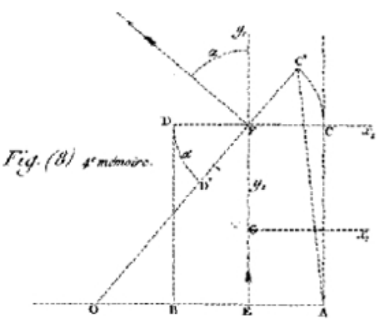


Fig. (6) 3e mémoire.

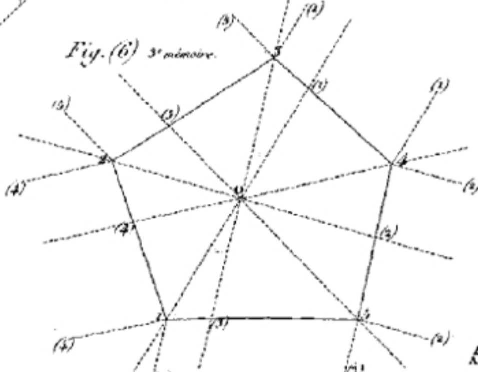


Fig. (7) 3e mémoire.

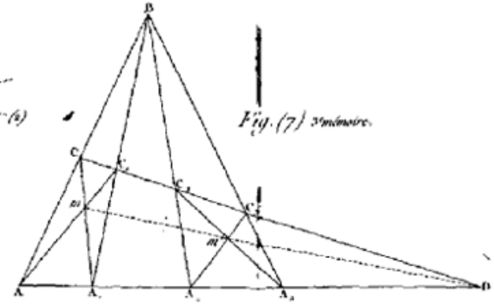


Fig. (9) 4e mémoire.