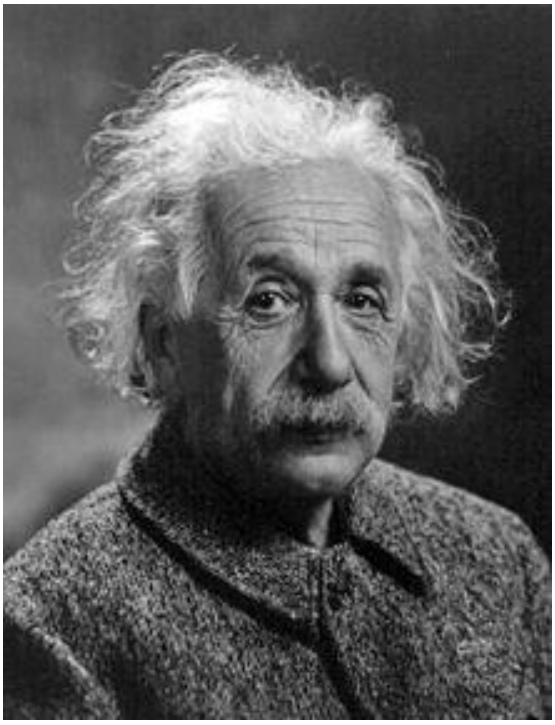
Information du lecteur



Le présent document est composé par : 1) l'article de 1905, en allemand, d'Albert Einstein (*Annalen der Physik*) ; 2) la traduction française, sous l'égide du site québécois Les Classiques des sciences sociales (2012, lien), que nous remercions ici.

(ci-contre, Albert Einstein, ca *1947, WikiCommons)*

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

§ 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System“.

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit“ verstanden wird.

Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an," so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse."[1])

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit" betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der „Zeit" die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr" setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte A des Raumes eine Uhr, so kann ein in A befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte B des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in A befindliche" — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von

1) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.

B durch einen in B befindlichen Beobachter möglich. Es ist aber ohne weitere Festsetzung nicht möglich, ein Ereignis in A mit einem Ereignis in B zeitlich zu vergleichen; wir haben bisher nur eine „A-Zeit" und eine „B-Zeit", aber keine für A und B gemeinsame „Zeit" definiert. Die letztere Zeit kann nun definiert werden, indem man *durch Definition* festsetzt, daß die „Zeit", welche das Licht braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich ist der „Zeit", welche es braucht, um von B nach A zu gelangen. Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „A-Zeit" t_A von A nach B ab, werde zur „B-Zeit" t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „A-Zeit" t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Wir nehmen an, daß diese Definition des Synchronismus in widerspruchsfreier Weise möglich sei, und zwar für beliebig viele Punkte, daß also allgemein die Beziehungen gelten:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B.

2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

Wir haben so unter Zuhilfenahme gewisser (gedachter) physikalischer Erfahrungen festgelegt, was unter synchron laufenden, an verschiedenen Orten befindlichen, ruhenden Uhren zu verstehen ist und damit offenbar eine Definition von „gleichzeitig" und „Zeit" gewonnen. Die „Zeit" eines Ereignisses ist die mit dem Ereignis gleichzeitige Angabe einer am Orte des Ereignisses befindlichen, ruhenden Uhr, welche mit einer bestimmten, ruhenden Uhr, und zwar für alle Zeitbestimmungen mit der nämlichen Uhr, synchron läuft.

Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume) sei.

Wesentlich ist, daß wir die Zeit mittels im ruhenden System ruhender Uhren definiert haben; wir nennen die eben definierte Zeit wegen dieser Zugehörigkeit zum ruhenden System „die Zeit des ruhenden Systems".

§ 2. Über die Relativität von Längen und Zeiten.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf das Relativitätsprinzip und auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welche beiden Prinzipien wir folgendermaßen definieren.

1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden" Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei „Zeitdauer" im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.

Es sei ein ruhender starrer Stab gegeben; derselbe besitze, mit einem ebenfalls ruhenden Maßstabe gemessen, die Länge l. Wir denken uns nun die Stabachse in die X-Achse des ruhenden Koordinatensystems gelegt und dem Stabe hierauf eine gleichförmige Paralleltranslationsbewegung (Geschwindigkeit v) längs der X-Achse im Sinne der wachsenden x erteilt. Wir fragen nun nach der Länge des *bewegten* Stabes, welche wir uns durch folgende zwei Operationen ermittelt denken:

a) Der Beobachter bewegt sich samt dem vorher genannten Maßstabe mit dem auszumessenden Stabe und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

b) Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden Systeme aufgestellter, gemäß § 1 synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden.

Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als „Länge des Stabes" bezeichnen kann.

Nach dem Relativitätsprinzip muß die bei der Operation a) zu findende Länge, welche wir „die Länge des Stabes im bewegten System" nennen wollen, gleich der Länge l des ruhenden Stabes sein.

Die bei der Operation b) zu findende Länge, welche wir „die Länge des (bewegten) Stabes im ruhenden System" nennen wollen, werden wir unter Zugrundelegung unserer beiden Prinzipien bestimmen und finden, daß sie von l verschieden ist.

Die allgemein gebrauchte Kinematik nimmt stillschweigend an, daß die durch die beiden erwähnten Operationen bestimmten Längen einander genau gleich seien, oder mit anderen Worten, daß ein bewegter starrer Körper in der Zeitepoche t in geometrischer Beziehung vollständig durch *denselben* Körper, wenn er in bestimmter Lage *ruht,* ersetzbar sei.

Wir denken uns ferner an den beiden Stabenden (A und B) Uhren angebracht, welche mit den Uhren des ruhenden Systems synchron sind, d. h. deren Angaben jeweilen der „Zeit des ruhenden Systems" an den Orten, an welchen sie sich gerade befinden, entsprechen; diese Uhren sind also „synchron im ruhenden System".

Wir denken uns ferner, daß sich bei jeder Uhr ein mit ihr bewegter Beobachter befinde, und daß diese Beobachter auf die beiden Uhren das im § 1 aufgestellte Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren anwenden. Zur Zeit[1]) t_A gehe ein Lichtstrahl von A aus, werde zur Zeit t_B in B reflektiert und gelange zur Zeit t'_A nach A zurück. Unter Berücksichtigung des Prinzipes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit finden wir:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

1) „Zeit" bedeutet hier „Zeit des ruhenden Systems" und zugleich „Zeigerstellung der bewegten Uhr, welche sich an dem Orte, von dem die Rede ist, befindet".

und

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

wobei r_{AB} die Länge des bewegten Stabes — im ruhenden System gemessen — bedeutet. Mit dem bewegten Stabe bewegte Beobachter würden also die beiden Uhren nicht synchron gehend finden, während im ruhenden System befindliche Beobachter die Uhren als synchron laufend erklären würden.

Wir sehen also, daß wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine *absolute* Bedeutung beimessen dürfen, sondern daß zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind.

§ 3. Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation von dem ruhenden auf ein relativ zu diesem in gleichförmiger Translationsbewegung befindliches System.

Seien im „ruhenden" Raume zwei Koordinatensysteme, d. h. zwei Systeme von je drei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten starren materiellen Linien, gegeben. Die X-Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre Y- und Z-Achsen bezüglich parallel sein. Jedem Systeme sei ein starrer Maßstab und eine Anzahl Uhren beigegeben, und es seien beide Maßstäbe sowie alle Uhren beider Systeme einander genau gleich.

Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (k) eine (konstante) Geschwindigkeit v in Richtung der wachsenden x des anderen, ruhenden Systems (K) erteilt, welche sich auch den Koordinatenachsen, dem betreffenden Maßstabe sowie den Uhren mitteilen möge. Jeder Zeit t des ruhenden Systems K entspricht dann eine bestimmte Lage der Achsen des bewegten Systems und wir sind aus Symmetriegründen befugt anzunehmen, daß die Bewegung von k so beschaffen sein kann, daß die Achsen des bewegten Systems zur Zeit t (es ist mit „t" immer eine Zeit des ruhenden Systems bezeichnet) den Achsen des ruhenden Systems parallel seien.

Wir denken uns nun den Raum sowohl vom ruhenden System K aus mittels des ruhenden Maßstabes als auch vom bewegten System k mittels des mit ihm bewegten Maßstabes ausgemessen und so die Koordinaten x, y, z bez. ξ, η, ζ ermittelt. Es werde ferner mittels der im ruhenden System befindlichen ruhenden Uhren durch Lichtsignale in der in § 1 angegebenen Weise die Zeit t des ruhenden Systems für alle Punkte des letzteren bestimmt, in denen sich Uhren befinden; ebenso werde die Zeit τ des bewegten Systems für alle Punkte des bewegten Systems, in welchen sich relativ zu letzterem ruhende Uhren befinden, bestimmt durch Anwendung der in § 1 genannten Methode der Lichtsignale zwischen den Punkten, in denen sich die letzteren Uhren befinden.

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t, welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ, und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - v\,t$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z und t. Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der im § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X-Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\tfrac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Systeme anwendet:

$$\tfrac{1}{2}\left[\tau\,(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, \left\{t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V - v}\right).$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

oder

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0.$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z.

Eine analoge Überlegung — auf die H- und Z-Achse angewandt — liefert, wenn man beachtet, daß sich das Licht längs dieser Achsen vom ruhenden System aus betrachtet stets mit der Geschwindigkeit $\sqrt{V^2-v^2}$ fortpflanzt:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da τ eine *lineare* Funktion ist:

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right),$$

wobei a eine vorläufig unbekannte Funktion $\varphi(v)$ ist und der Kürze halber angenommen ist, daß im Anfangspunkte von k für $\tau=0$ $t=0$ sei.

Mit Hilfe dieses Resultates ist es leicht, die Größen ξ, η, ζ zu ermitteln, indem man durch Gleichungen ausdrückt, daß sich das Licht (wie das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip verlangt) auch im bewegten System gemessen mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt. Für einen zur Zeit $\tau=0$ in Richtung der wachsenden ξ ausgesandten Lichtstrahl gilt:

$$\xi=V\tau,$$

oder

$$\xi=aV\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right).$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangspunkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V-v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V-v}=t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2-v^2}x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegte Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = a V\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^2-v^2}}=t; \quad x'=0;$$

also

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}y$$

und

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t-\frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \varphi(v)\beta(x-vt),$$
$$\eta = \varphi(v)y,$$
$$\zeta = \varphi(v)z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden

System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 .$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 .$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V. Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System k derart in Paralleltranslationsbewegung parallel zur Ξ-Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ-Achse bewege. Zur Zeit $t = 0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t = x = y = z = 0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t, \\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x, \\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y, \\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander, und es ist klar, daß die Transformation von K auf K' die identische Transformation sein muß. Es ist also:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Wir fragen nun nach der Bedeutung von $\varphi(v)$. Wir fassen das Stück der H-Achse des Systems k ins Auge, das zwischen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$ gelegen ist. Dieses Stück der H-Achse ist ein relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Achse bewegter Stab, dessen Enden in K die Koordinaten besitzen:

$$x_1 = v\,t, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

und

$$x_2 = v\,t, \quad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

Die Länge des Stabes, in K gemessen, ist also $l/\varphi(v)$; damit ist die Bedeutung der Funktion φ gegeben. Aus Symmetriegründen ist nun einleuchtend, daß die im ruhenden System gemessene Länge eines bestimmten Stabes, welcher senkrecht zu seiner Achse bewegt ist, nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung und dem Sinne der Bewegung abhängig sein kann. Es ändert sich also die im ruhenden System gemessene Länge des bewegten Stabes nicht, wenn v mit $-v$ vertauscht wird. Hieraus folgt:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

oder

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aus dieser und der vorhin gefundenen Relation folgt, daß $\varphi(v) = 1$ sein muß, so daß die gefundenen Transformationsgleichungen übergehen in:

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right), \\ \xi &= \beta(x - v\,t), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

§ 4. Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen, bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend.

Wir betrachten eine starre Kugel[1]) vom Radius R, welche relativ zum bewegten System k ruht, und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von k liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 .$$

Die Gleichung dieser Oberfläche ist in x, y, z ausgedrückt zur Zeit $t = 0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande — vom ruhenden System aus betrachtet — die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}, \ R, \ R .$$

Während also die Y- und Z-Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X-Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom „ruhenden“ System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen. Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos; wir werden übrigens in den folgenden Betrachtungen finden, daß die Lichtgeschwindigkeit in unserer Theorie physikalisch die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeiten spielt.

Es ist klar, daß die gleichen Resultate von im „ruhenden“ System ruhenden Körpern gelten, welche von einem gleichförmig bewegten System aus betrachtet werden. —

Wir denken uns ferner eine der Uhren, welche relativ zum ruhenden System ruhend die Zeit t, relativ zum bewegten

1) Das heißt einen Körper, welcher ruhend untersucht Kugelgestalt besitzt.

System ruhend die Zeit τ anzugeben befähigt sind, im Koordinatenursprung von k gelegen und so gerichtet, daß sie die Zeit τ angibt. Wie schnell geht diese Uhr, vom ruhenden System aus betrachtet?

Zwischen die Größen x, t und τ, welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

und

$$x = v\,t.$$

Es ist also

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

Hieraus ergibt sich folgende eigentümliche Konsequenz. Sind in den Punkten A und B von K ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v auf der Verbindungslinie nach B, so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht gegenüber der von Anfang an in B befindlichen um $\frac{1}{2}t v^2/V^2$ Sek. (bis auf Größen vierter und höherer Ordnung) nach, wenn t die Zeit ist, welche die Uhr von A nach B braucht.

Man sieht sofort, daß dies Resultat auch dann noch gilt, wenn die Uhr in einer beliebigen polygonalen Linie sich von A nach B bewegt, und zwar auch dann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Nimmt man an, daß das für eine polygonale Linie bewiesene Resultat auch für eine stetig gekrümmte Kurve gelte, so erhält man den Satz: Befinden sich in A zwei synchron gehende Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkommt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der un-bewegt gebliebenen um $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ Sek. nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhuhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfene, an einem Erdpole befindliche Uhr.

§ 5. Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

In dem längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewegten System k bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen:

$$\xi = w_\xi \tau,$$

$$\eta = w_\eta \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

wobei w_ξ und w_η Konstanten bedeuten.

Gesucht ist die Bewegung des Punktes relativ zum System K. Führt man in die Bewegungsgleichungen des Punktes mit Hilfe der in § 3 entwickelten Transformationsgleichungen die Größen x, y, z, t ein, so erhält man:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nach unserer Theorie nur in erster Annäherung. Wir setzen:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x};$$

α ist dann als der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten v und w anzusehen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2\,v\,w\cos\alpha) - \left(\frac{v\,w\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w\cos\alpha}{V^2}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß v und w in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch w die Richtung der X-Achse (Ξ-Achse), so erhalten wir:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als V, stets eine Geschwindigkeit kleiner als V resultiert. Setzt man nämlich $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, wobei $\varkappa$ und λ positiv und kleiner als V seien, so ist:

$$U = V\frac{2\,V - \varkappa - \lambda}{2\,V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Es folgt ferner, daß die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer „Unterlichtgeschwindigkeit" nicht geändert werden kann. Man erhält für diesen Fall:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Wir hätten die Formel für U für den Fall, daß v und w gleiche Richtung besitzen, auch durch Zusammensetzen zweier Transformationen gemäß § 3 erhalten können. Führen wir neben den in § 3 figurierenden Systemen K und k noch ein drittes, zu k in Parallelbewegung begriffenes Koordinatensystem k' ein, dessen Anfangspunkt sich auf der Ξ-Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, so erhalten wir zwischen den Größen x, y, z, t und den entsprechenden Größen von k' Gleichungen, welche sich von den in § 3 gefundenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von „v" die Größe

$$\frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}$$

tritt; man sieht daraus, daß solche Paralleltransformationen — wie dies sein muß — eine Gruppe bilden.

Wir haben nun die für uns notwendigen Sätze der unseren zwei Prinzipien entsprechenden Kinematik hergeleitet und gehen dazu über, deren Anwendung in der Elektrodynamik zu zeigen.

II. Eektrodynamischer Teil.

§ 6. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum. Über die Natur der bei Bewegung in einem Magnetfeld auftretenden elektromotorischen Kräfte.

Die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum mögen gültig sein für das ruhende System K, so daß gelten möge:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

wobei (X, Y, Z) den Vektor der elektrischen, (L, M, N) den der magnetischen Kraft bedeutet.

Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial\tau}=\frac{\partial\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial X}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial\tau}=\frac{\partial X}{\partial\eta}-\frac{\partial\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial\xi},$$

wobei

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum auch im System k gelten, wenn sie im System K gelten, d. h. daß für die im bewegten System k durch ihre ponderomotorischen Wirkungen auf elektrische bez. magnetische Massen definierten Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft $((X', Y' Z')$ und $(L', M', N'))$ des bewegten Systems k die Gleichungen gelten:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial\tau}=\frac{\partial N'}{\partial\eta}-\frac{\partial M'}{\partial\zeta},\qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial\tau}=\frac{\partial Y'}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial\eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial\tau}=\frac{\partial L'}{\partial\zeta}-\frac{\partial N'}{\partial\xi},\qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial\tau}=\frac{\partial Z'}{\partial\xi}-\frac{\partial X'}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial\tau}=\frac{\partial M'}{\partial\xi}-\frac{\partial L'}{\partial\eta},\qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial\tau}=\frac{\partial X'}{\partial\eta}-\frac{\partial Y'}{\partial\xi}.$$

Offenbar müssen nun die beiden für das System k gefundenen Gleichungssysteme genau dasselbe ausdrücken, da beide Gleichungssysteme den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für das System K äquivalent sind. Da die Gleichungen beider Systeme ferner bis auf die die Vektoren darstellenden Symbole übereinstimmen, so folgt, daß die in den Gleichungssystemen an entsprechenden Stellen auftretenden Funktionen bis auf einen für alle Funktionen des einen Gleichungssystems gemeinsamen, von ξ, η, ζ und τ unabhängigen, eventuell von v abhängigen Faktor $\psi(v)$ übereinstimmen müssen. Es gelten also die Beziehungen:

$$X'=\psi(v)X,\qquad L'=\psi(v)L,$$

$$Y'=\psi(v)\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right),\qquad M'=\psi(v)\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z'=\psi(v)\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right),\qquad N'=\psi(v)\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right).$$

Bildet man nun die Umkehrung dieses Gleichungssystems, erstens durch Auflösen der soeben erhaltenen Gleichungen, zweitens durch Anwendung der Gleichungen auf die inverse Transformation (von k auf K), welche durch die Geschwindigkeit $-v$ charakterisiert ist, so folgt, indem man berücksichtigt, daß die beiden so erhaltenen Gleichungssysteme identisch sein müssen:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 .$$

Ferner folgt aus Symmetriegründen[1])

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

es ist also

$$\varphi(v) = 1 ,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right). \end{aligned}$$

Zur Interpretation dieser Gleichungen bemerken wir folgendes. Es liegt eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche im ruhenden System K gemessen von der Größe „eins" sei, d. h. im ruhenden System ruhend auf eine gleiche Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch im bewegten System gemessen von der Größe „eins". Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zum ruhenden System, so ist definitionsgemäß der Vektor (X, Y, Z) gleich der auf sie wirkenden Kraft. Ruht die Elektrizitätsmenge gegenüber dem bewegten System (wenigstens in dem betreffenden Augenblick), so ist die auf sie wirkende, in dem bewegten System gemessene Kraft gleich dem Vektor (X', Y', Z'). Die ersten drei der obigen Gleichungen lassen sich mithin auf folgende zwei Weisen in Worte kleiden:

1. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so wirkt auf ihn außer der

---

1) Ist z. B. $X = Y = Z = L = M = 0$ und $N \neq 0$, so ist aus Symmetriegründen klar, daß bei Zeichenwechsel von v ohne Änderung des numerischen Wertes auch Y' sein Vorzeichen ändern muß, ohne seinen numerischen Wert zu ändern.

elektrischen Kraft eine „elektromotorische Kraft", welche unter Vernachlässigung von mit der zweiten und höheren Potenzen von v/V multiplizierten Gliedern gleich ist dem mit der Lichtgeschwindigkeit dividierten Vektorprodukt der Bewegungsgeschwindigkeit des Einheitspoles und der magnetischen Kraft. (Alte Ausdrucksweise.)

2. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft, welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält. (Neue Ausdrucksweise.)

Analoges gilt über die „magnetomotorischen Kräfte". Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen.

Es ist ferner klar, daß die in der Einleitung angeführte Asymmetrie bei der Betrachtung der durch Relativbewegung eines Magneten und eines Leiters erzeugten Ströme verschwindet. Auch werden die Fragen nach dem „Sitz" der elektrodynamischen elektromotorischen Kräfte (Unipolarmaschinen) gegenstandslos.

§ 7. Theorie des Doppelerschen Prinzips und der Aberration.

Im Systeme K befinde sich sehr ferne vom Koordinatenursprung eine Quelle elektrodynamischer Wellen, welche in einem den Koordinatenursprung enthaltenden Raumteil mit genügender Annäherung durch die Gleichungen dargestellt sei:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, \qquad \Phi = \omega\left(t - \frac{a x + b y + c z}{V}\right). \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Hierbei sind (X_0, Y_0, Z_0) und (L_0, M_0, N_0) die Vektoren, welche die Amplitude des Wellenzuges bestimmen, a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen.

Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Wellen, wenn dieselben von einem in dem bewegten System k ruhenden

Beobachter untersucht werden. — Durch Anwendung der in § 6 gefundenen Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte und der in § 3 gefundenen Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit erhalten wir unmittelbar:

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi',$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi',$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

wobei

$$\omega' = \omega \beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}$$

gesetzt ist.

Aus der Gleichung für ω' folgt: Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter“ mit der auf ein relativ zur Lichtquelle ruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes durch die Gleichung gegeben:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Dies ist das Doppelersche Prinzip für beliebige Geschwindigkeiten. Für $\varphi = 0$ nimmt die Gleichung die übersichtliche Form an:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Man sieht, daß — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — für $v = -\infty$, $\nu = \infty$ ist.

Nennt man φ' den Winkel zwischen Wellennormale (Strahlrichtung) im bewegten System und der Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter", so nimmt die Gleichung für a' die Form an:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus. Ist $\varphi = \pi/2$, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Wir haben nun noch die Amplitude der Wellen, wie dieselbe im bewegten System erscheint, zu suchen. Nennt man A bez. A' die Amplitude der elektrischen oder magnetischen Kraft im ruhenden bez. im bewegten System gemessen, so erhält man:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

welche Gleichung für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Es folgt aus den entwickelten Gleichungen, daß für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V einer Lichtquelle näherte, diese Lichtquelle unendlich intensiv erscheinen müßte.

§ 8. Transformation der Energie der Lichtstrahlen. Theorie des auf vollkommene Spiegel ausgeübten Strahlungsdruckes.

Da $A^2/8\pi$ gleich der Lichtenergie pro Volumeneinheit ist, so haben wir nach dem Relativitätsprinzip $A'^2/8\pi$ als die Lichtenergie im bewegten System zu betrachten. Es wäre daher A'^2/A^2 das Verhältnis der „bewegt gemessenen" und „ruhend gemessenen" Energie eines bestimmten Lichtkomplexes, wenn das Volumen eines Lichtkomplexes in K gemessen und in k gemessen das gleiche wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen des Lichtes im ruhenden System, so wandert durch die Oberflächenelemente der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugelfläche

$$(x - V a t)^2 + (y - V b t)^2 + (z - V c t)^2 = R^2$$

keine Energie hindurch; wir können daher sagen, daß diese Fläche dauernd denselben Lichtkomplex umschließt. Wir fragen nach der Energiemenge, welche diese Fläche im System k betrachtet umschließt, d. h. nach der Energie des Lichtkomplexes relativ zum System k.

Die Kugelfläche ist — im bewegten System betrachtet — eine Ellipsoidfläche, welche zur Zeit $\tau = 0$ die Gleichung besitzt:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Nennt man S das Volumen der Kugel, S' dasjenige dieses Ellipsoides, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Nennt man also E die im ruhenden System gemessene, E' die im bewegten System gemessene Lichtenergie, welche von der betrachteten Fläche umschlossen wird, so erhält man:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

welche Formel für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Energie und die Frequenz eines Lichtkomplexes sich nach demselben Gesetze mit dem Bewegungszustande des Beobachters ändern.

Es sei nun die Koordinatenebene $\xi = 0$ eine vollkommen spiegelnde Fläche, an welcher die im letzten Paragraph betrachteten ebenen Wellen reflektiert werden. Wir fragen nach dem auf die spiegelnde Fläche ausgeübten Lichtdruck und nach der Richtung, Frequenz und Intensität des Lichtes nach der Reflexion.

Das einfallende Licht sei durch die Größen A, $\cos\varphi$, ν (auf das System K bezogen) definiert. Von k aus betrachtet sind die entsprechenden Größen:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V} \cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Für das reflektierte Licht erhalten wir, wenn wir den Vorgang auf das System k beziehen:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Endlich erhält man durch Rücktransformieren aufs ruhende System K für das reflektierte Licht:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Die auf die Flächeneinheit des Spiegels pro Zeiteinheit auftreffende (im ruhenden System gemessene) Energie ist offenbar $A^2/8\pi\,(V\cos\varphi - v)$. Die von der Flächeneinheit des Spiegels in der Zeiteinheit sich entfernende Energie ist $A'''^2/8\pi\,(-V\cos\varphi''' + v)$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Energieprinzip die vom Lichtdrucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Setzt man die letztere gleich dem Produkt $P.v$, wobei P der Lichtdruck ist, so erhält man:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In erster Annäherung erhält man in Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit anderen Theorien

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Nach der hier benutzten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche ist, daß die elektrische und magnetische Kraft des Lichtes, welches durch einen bewegten Körper beeinflußt wird, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wird jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückgeführt.

§ 9. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Konvektionsströme.

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x \varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y \varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z \varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

wobei

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

die 4π-fache Dichte der Elektrizität und (u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität bedeutet. Denkt man sich die elektrischen Massen unveränderlich an kleine, starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden, so sind diese Gleichungen die elektromagnetische Grundlage der Lorentzschen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche im System K gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen von § 3 und § 6 auf das System k, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi \varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta \varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta \varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

wobei

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi\,,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v\,u_x}{V^2}\right)\varrho\,.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta\,.$$

Da — wie aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten (§ 5) folgt — der Vektor (u_ξ, u_η, u_ζ) nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der elektrischen Massen im System k gemessen, so ist damit gezeigt, daß unter Zugrundelegung unserer kinematischen Prinzipien die elektrodynamische Grundlage der Lorentzschen Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper dem Relativitätsprinzip entspricht.

Es möge noch kurz bemerkt werden, daß aus den entwickelten Gleichungen leicht der folgende wichtige Satz gefolgert werden kann: Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper beliebig im Raume und ändert sich hierbei seine Ladung nicht, von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, so bleibt seine Ladung auch — von dem „ruhenden" System K aus betrachtet — konstant.

§ 10. Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung ε versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron" genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir nur folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einer bestimmten Epoche, so erfolgt in dem nächsten Zeitteilchen die Bewegung des Elektrons nach den Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon Z,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Elektrons, μ die Masse des Elektrons bedeutet, sofern dasselbe langsam bewegt ist.

Es besitze nun zweitens das Elektron in einer gewissen Zeitepoche die Geschwindigkeit v. Wir suchen das Gesetz, nach welchem sich das Elektron im unmittelbar darauf folgenden Zeitteilchen bewegt.

Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinflussen, können und wollen wir annehmen, daß das Elektron in dem Momente, wo wir es ins Auge fassen, sich im Koordinatensprung befinde und sich längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewege. Es ist dann einleuchtend, daß das Elektron im genannten Momente ($t = 0$) relativ zu einem längs der X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v parallelbewegten Koordinatensystem k ruht.

Aus der oben gemachten Voraussetzung in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip ist klar, daß sich das Elektron in der unmittelbar folgenden Zeit (für kleine Werte von t) vom System k aus betrachtet nach den Gleichungen bewegt:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d \tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d \tau^2} = \varepsilon Z',$$

wobei die Zeichen ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' sich auf das System k beziehen. Setzen wir noch fest, daß für $t = x = y = z = 0$ $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so gelten die Transformationsgleichungen der §§ 3 und 6, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \tau &= \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x\right), & & \\ \xi &= \beta (x - v t), & X' &= X, \\ \eta &= y, & Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\ \zeta &= z, & Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{V} M\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen transformieren wir die obigen Bewegungsgleichungen vom System k auf das System K und erhalten:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^3} X, \\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M\right). \end{aligned} \right.$$

Wir fragen nun in Anlehnung an die übliche Betrachtungsweise nach der „longitudinalen“ und „transversalen“ Masse des bewegten Elektrons. Wir schreiben die Gleichungen (A) in der Form

$$\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M\right) = \varepsilon Z'$$

und bemerken zunächst, daß $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ die Komponenten der auf das Elektron wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, und zwar in einem in diesem Moment mit dem Elektron mit gleicher Geschwindigkeit wie dieses bewegten System betrachtet. (Diese Kraft könnte beispielsweise mit einer im letzten System ruhenden Federwage gemessen werden.) Wenn wir nun diese Kraft schlechtweg „die auf das Elektron wirkende Kraft“ nennen und die Gleichung

Massenzahl $\times$ Beschleunigungszahl $=$ Kraftzahl

aufrechterhalten, und wenn wir ferner festsetzen, daß die Beschleunigungen im ruhenden System K gemessen werden sollen, so erhalten wir aus obigen Gleichungen:

$$\text{Longitudinale Masse} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{Transversale Masse} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Natürlich würde man bei anderer Definition der Kraft und der Beschleunigung andere Zahlen für die Massen erhalten; man ersieht daraus, daß man bei der Vergleichung verschiedener Theorien der Bewegung des Elektrons sehr vorsichtig verfahren muß.

Wir bemerken, daß diese Resultate über die Masse auch für die ponderabeln materiellen Punkte gilt; denn ein ponderabler materieller Punkt kann durch Zufügen einer *beliebig kleinen* elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.

Wir bestimmen die kinetische Energie des Elektrons. Bewegt sich ein Elektron vom Koordinatenursprung des Systems K aus mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 beständig auf der

X-Achse unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft X, so ist klar, daß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie den Wert $\int \varepsilon X d x$ hat. Da das Elektron langsam beschleunigt sein soll und infolgedessen keine Energie in Form von Strahlung abgeben möge, so muß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie gleich der Bewegungsenergie W des Elektrons gesetzt werden. Man erhält daher, indem man beachtet, daß während des ganzen betrachteten Bewegungsvorganges die erste der Gleichungen (A) gilt:

$$W = \int \varepsilon X d x = \int\limits_0^v \beta^3 v d v = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W wird also für $v = V$ unendlich groß. Überlichtgeschwindigkeiten haben — wie bei unseren früheren Resultaten — keine Existenzmöglichkeit.

Auch dieser Ausdruck für die kinetische Energie muß dem oben angeführten Argument zufolge ebenso für ponderable Massen gelten.

Wir wollen nun die aus dem Gleichungssystem (A) resultierenden, dem Experimente zugänglichen Eigenschaften der Bewegung des Elektrons aufzählen.

1. Aus der zweiten Gleichung des Systems (A) folgt, daß eine elektrische Kraft Y und eine magnetische Kraft N dann gleich stark ablenkend wirken auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron, wenn $Y = N . v / V$. Man ersieht also, daß die Ermittelung der Geschwindigkeit des Elektrons aus dem Verhältnis der magnetischen Ablenkbarkeit A_m und der elektrischen Ablenkbarkeit A_e nach unserer Theorie für beliebige Geschwindigkeiten möglich ist durch Anwendung des Gesetzes:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Diese Beziehung ist der Prüfung durch das Experiment zugänglich, da die Geschwindigkeit des Elektrons auch direkt, z. B. mittels rasch oszillierender elektrischer und magnetischer Felder, gemessen werden kann.

2. Aus der Ableitung für die kinetische Energie des Elektrons folgt, daß zwischen der durchlaufenen Potential-

differenz und der erlangten Geschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung gelten muß:

$$P = \int X\,d\,x = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Wir berechnen den Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N (als einzige ablenkende Kraft) vorhanden ist. Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhalten wir:

$$-\frac{d^2 y}{d\,t^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Diese drei Beziehungen sind ein vollständiger Ausdruck für die Gesetze, nach denen sich gemäß vorliegender Theorie das Elektron bewegen muß.

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)

« De l'électrodynamique des corps en mouvement[1] »

Il est connu que si nous appliquons l'électrodynamique de Maxwell, telle que nous la concevons aujourd'hui, aux corps en mouvement, nous sommes conduits à une asymétrie qui ne s'accorde pas avec les phénomènes observés. Analysons par exemple l'influence mutuelle d'un aimant et d'un conducteur. Le phénomène observé dans ce cas dépend uniquement du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant, alors que selon les conceptions habituelles, une distinction doit être établie entre les cas où l'un ou l'autre des corps est en mouvement. Si, par exemple, l'aimant se déplace et que le conducteur est au repos, alors un champ électrique d'une certaine énergie apparaît à proximité de l'aimant, ce qui engendre un courant dans les parties du champ où se trouve un conducteur. Mais si l'aimant est au repos et le conducteur mis en mouvement, aucun champ électrique n'apparaît à proximité de l'aimant, cependant une force électromotrice — qui ne correspond à aucune énergie en soi — est produite dans le conducteur. Elle provoque cependant — dans l'hypothèse où le mouvement relatif dans les deux cas est le même — l'apparition d'un courant électrique de même intensité et de même direction que la force électrique, comme la force électrique dans le premier cas.

Des exemples similaires, tout comme l'essai infructueux de confirmer le mouvement de la Terre relativement au « médium de la lumière » [NdT 1], nous amènent à la supposition que, non seulement en mécanique, mais aussi en électrodynamique, aucune propriété des faits observés ne correspond au concept de repos absolu ; et que dans tous les systèmes de coordonnées où les équations de la mécanique sont vraies, les équations électrodynamiques et optiques équivalentes sont également vraies, comme il a été déjà montré par l'approximation au premier ordre des grandeurs. Dans le texte qui suit, nous élevons cette conjecture au rang de postulat (que nous appellerons dorénavant « principe de relativité ») et introduisons un autre postulat — qui au premier regard est incompatible avec le premier — que la lumière se propage dans l'espace vide [NdT 2], à une vitesse V indépendante de l'état de mouvement du corps émetteur. Ces deux postulats suffisent entièrement pour former une théorie simple et cohérente de l'électrodynamique des corps en mouvement à partir de la théorie maxwellienne des corps au repos. Il sera démontré que l'introduction d'un « éther luminifère » est superflu, puisque selon les conceptions que nous développerons, nous n'introduirons ni un « espace absolument

1. Albert Einstein (1905) ; traduit de l'allemand vers l'anglais en 1920 par l'astrophysicien indien Meghnad Saha (1893-1956) ; par Cantons de l'Est (Wikisource) de l'anglais vers le français (2012) ; relu par Simon Villeneuve, et publié sous l'égide du site Classiques des Sciences sociales (Jean-Marie Tremblay éditeur).

au repos » muni de propriétés spéciales et ni n'associerons un vecteur-vitesse à un point où des phénomènes électromagnétiques se déroulent.

Comme pour toute autre théorie électrodynamique, la théorie proposée s'appuie sur la cinématique des corps rigides. Dans la formulation de toute théorie, nous devons composer avec les relations entre les corps rigides (système de coordonnées), les horloges et les phénomènes électromagnétiques. Une appréciation insuffisante de ces conditions est la cause des problèmes auxquels se heurte présentement l'électrodynamique des corps en mouvement.

I. PARTIE CINÉMATIQUE

§ 1. Définition de la simultanéité

Supposons un système de coordonnées dans lequel les équations newtoniennes sont vraies. Pour distinguer ce système d'un autre qui sera introduit plus tard, et pour rendre cette notion plus claire, nous l'appellerons le « système stationnaire ».

Si un point matériel est au repos dans ce système de coordonnées, alors sa position dans ce système peut être trouvée grâce à une règle à mesurer [NdT 3] en utilisant des méthodes en géométrie euclidienne, et exprimée en coordonnées cartésiennes.

Si nous voulons décrire le *mouvement* d'un point matériel, les valeurs de ses coordonnées doivent être exprimées en fonction du temps. Il faut toujours garder en tête qu'une telle définition mathématique possède un sens physique, seulement si nous avons au préalable une perception claire de ce qu'est le « temps ». Nous devons prendre en considération le fait que nos conceptions, où le temps joue un rôle, portent toujours sur des *événements simultanés*. Par exemple, si nous disons « qu'un train arrive ici à 7 heures », cela signifie « que la petite aiguille de ma montre qui pointe exactement le 7 et que l'arrivée du train sont des évènements simultanés[2] ».

Il peut sembler que toutes les difficultés provenant de la définition du « temps » peuvent être supprimées quand, au « temps », nous substituons « la position de la petite aiguille de ma montre ». Une telle définition est dans les faits suffisante, quand il est requis de définir le temps exclusivement à l'endroit où l'horloge se trouve. Mais elle ne suffit plus lorsqu'il s'agit de relier chronologiquement des évènements qui ont lieu à des endroits différents — ou ce qui revient au même —, d'estimer chronologiquement l'occurrence d'évènements qui surviennent à des endroits éloignés de l'horloge.

2. L'inexactitude, inhérente au concept de simultanéité de deux évènements (presque) au même endroit, et qui doit également être résolue par une abstraction, n'est pas discutée ici.

Cependant, pour estimer chronologiquement les évènements, nous pouvons obtenir satisfaction en supposant qu'un observateur, placé à l'origine du système de coordonnées avec l'horloge, associe un signal lumineux — témoignant de l'évènement à estimer et du rayon lumineux qui vient à lui à travers l'espace — à la position correspondante des aiguilles de l'horloge. Cependant, une telle association a un défaut : elle dépend de la position de l'observateur qui observe l'horloge, comme l'expérience nous le dicte. Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus pratique de la façon suivante.

Si un observateur est placé en A avec une horloge, il peut assigner un temps aux évènements à proximité de A en observant la position des aiguilles de l'horloge, qui sont simultanées avec l'évènement. Si une horloge est aussi placée en B — nous ajoutons que cette horloge est de même construction que celle en A —, alors un observateur en B peut chronologiquement estimer les évènements qui surviennent dans le voisinage de B. Mais sans conventions préalables, il est impossible de comparer chronologiquement les évènements en B aux évènements en A. Nous avons jusqu'à maintenant un « temps A » et un « temps B », mais aucun « temps » commun à A et B. Ce dernier temps (c'est-à-dire le temps commun) peut être défini, si nous posons *par définition* que le « temps » requis par la lumière pour aller de A à B est équivalent au « temps » pris par la lumière pour aller de B à A. Par exemple, un rayon lumineux part de A au « temps A », t_A, en direction de B, est réfléchi de B au « temps B », t_B, et revient à A au « temps A », t'_A. Par définition, les deux horloges sont synchronisées si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Nous supposons que cette définition du synchronisme est possible sans causer d'incohérence, peu importe le nombre de points. En conséquence les relations suivantes sont vraies :

1. Si l'horloge en B est synchronisée avec l'horloge en A, alors l'horloge en A est synchronisée avec l'horloge en B.
2. Si l'horloge en A est synchronisée à la fois avec l'horloge en B et avec l'horloge en C, alors les horloges en B et C sont synchronisées.

Donc, à l'aide de certaines expériences physiques (de pensée), nous avons établi ce que nous entendons lorsque nous parlons d'horloges au repos à différents endroits, et synchronisées les unes avec les autres ; et nous avons par conséquent établi une définition de la « simultanéité » et du « temps ». Le « temps » d'un évènement est l'indication simultanée d'une horloge au repos située à l'endroit de l'évènement, qui est synchronisée avec une certaine horloge au repos dans tous les cas de détermination du temps.

En accord avec l'expérience, nous ferons donc l'hypothèse que la grandeur

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V,$$

est une constante universelle (la vitesse de la lumière dans l'espace vide).

Nous venons de définir le temps à l'aide d'une horloge au repos dans un système stationnaire. Puisqu'il existe en propre dans un système stationnaire, nous appelons le temps ainsi défini « temps du système stationnaire ».

§ 2. Sur la relativité des longueurs et des temps

Les réflexions suivantes s'appuient sur le principe de relativité et sur le principe de la constance de la vitesse de la lumière, les deux que nous définissons comme suit :

1. Les lois selon lesquelles l'état des systèmes physiques se transforme sont indépendantes de la façon que ces changements sont rapportés dans deux systèmes de coordonnées (systèmes qui sont en mouvement rectiligne uniforme [NdT 4] l'un par rapport à l'autre).
2. Chaque rayon lumineux se déplace dans un système de coordonnées « stationnaire » à la même vitesse V, la vitesse étant indépendante de la condition que ce rayon lumineux soit émis par un corps au repos ou en mouvement. Donc,

$$\text{vitesse} = \frac{\text{Trajet de la lumiere}}{\text{Intervalle de temps}},$$

où « intervalle de temps » doit être compris tel que défini au § 1.

Soit une tige rigide au repos ; elle est d'une longueur l quand elle est mesurée par une règle au repos. Nous supposons que l'axe de la tige se confond avec l'axe des x du système stationnaire. Imprimons à la tige une vitesse uniforme v, parallèle à l'axe des x et dans la direction croissante des x. Quelle est la longueur de la longueur de la tige en mouvement ? Elle peut être obtenue de deux façons :

a) L'observateur pourvu de la règle à mesurer se déplace avec la tige à mesurer et mesure sa longueur en superposant la règle sur la tige, comme si l'observateur, la règle à mesurer et la tige sont au repos.

b) L'observateur détermine à quels points du système stationnaire se trouvent les extrémités de la tige à mesurer au temps t, se servant des horloges placées dans le système stationnaire (les horloges étant synchronisées comme décrit au § 1). La distance entre ces deux points, mesurée par la même règle à mesurer quand elle était au repos, est aussi une longueur, que nous appelons la « longueur de la tige ».

Selon le principe de relativité, la longueur trouvée par l'opération a), que nous appelons la « longueur de la tige dans le système en mouvement », est égale à la longueur l de la tige dans le système stationnaire.

La longueur trouvée par l'opération b) peut être appelée la « longueur de la tige (en mouvement) dans le système stationnaire ». Cette longueur est à calculer en s'appuyant sur nos deux principes, et nous découvrirons qu'elle diffère de l.

Dans la cinématique généralement utilisée, il est implicitement supposé que les longueurs définies par ces deux opérations sont égales ou, dit autrement, qu'à un moment donné t, une tige rigide en mouvement est géométriquement remplaçable par *un même* corps, quand il est *au repos* à un endroit précis.

Supposons de plus que deux horloges synchronisées avec des horloges dans le système stationnaire sont fixées aux extrémités A et B d'une tige, c'est-à-dire que les temps des horloges correspondent aux « temps du système stationnaire » aux points où elles arrivent ; ces horloges sont donc « synchronisées dans le système stationnaire ».

Imaginons encore qu'il y a deux observateurs auprès des deux horloges qui se déplacent avec elles, et que ces observateurs appliquent le critère de synchronisme du § 1 aux deux horloges. Au temps[3] t_A, un rayon lumineux va de A, est réfléchi par B au temps t_B et arrive à A au temps t'_A. Prenant en compte le principe de la constance de la vitesse de la lumière, nous avons

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v},$$

et

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

où r_{AB} est la longueur de la tige en mouvement, mesurée dans le système stationnaire. En conséquence, les observateurs qui se déplacent avec la tige en mouvement n'affirmeront pas que les horloges sont synchronisées, même si les observateurs dans le système stationnaire témoigneront que les horloges sont synchronisées.

Nous en concluons que nous ne pouvons pas attacher une signification *absolue* au concept de simultanéité. Dès lors, deux évènements qui sont simultanés lorsque observés d'un système ne seront pas simultanés lorsque observés d'un système en mouvement relativement au premier.

3. Ici, le terme « temps » indique indifféremment « temps dans le système stationnaire » et « position des aiguilles d'une horloge en mouvement » située à la position en question.

§ 3. Théorie de la transformation des coordonnées et du temps d'un système stationnaire à un autre en mouvement relatif uniforme comparativement au premier

Plaçons, dans le système « stationnaire », deux systèmes de coordonnées, c'est-à-dire deux séries de trois axes rigides (mutuellement perpendiculaires) tous issus d'un point [NdT 5]. Faisons coïncider l'axe des x de chacun des systèmes et mettons en parallèle les axes des y et des z. Soit une règle rigide et un certain nombre d'horloges dans chaque système, les tiges et les horloges dans chacun étant identiques.

Soit un point initial de l'un des systèmes (k) animé d'une vitesse (constante) v dans la direction croissante de l'axe des x de l'autre système, un système stationnaire (K), et la vitesse étant aussi communiquée aux axes, aux tiges et aux horloges dans le système. N'importe quel temps t du système stationnaire K correspond à une position certaine des axes du système en mouvement. Pour des raisons de symétrie, nous pouvons affirmer que le mouvement de k est tel que les axes du système en mouvement au temps t (par t, nous entendons le temps dans le système stationnaire) sont parallèles aux axes du système stationnaire.

Supposons que l'espace est mesuré par la règle immobile placée dans le système stationnaire K, tout comme par la règle en mouvement placée dans le système en mouvement k, nous avons donc les coordonnées x, y, z et ξ, η, ζ, respectivement. De plus, mesurons le temps t à chaque point du système stationnaire grâce aux horloges qui sont placées dans le système stationnaire, à l'aide de la méthode des signaux lumineux décrite au § 1. Soit aussi le temps τ dans le système en mouvement qui est connu pour chaque point du système en mouvement (dans lequel se trouvent des horloges qui sont au repos dans le système en mouvement), grâce à la méthode des signaux lumineux entre ces points (positions où se trouvent des horloges) décrit au § 1.

Pour chacun des ensembles de valeurs x, y, z, t qui indique complètement la position et le temps de l'évènement dans le système stationnaire, il existe un ensemble de valeurs ξ, η, ζ, τ dans le système k. Maintenant, le problème est de trouver le système d'équations qui relie ces valeurs.

Premièrement, il est évident que, en s'appuyant sur la propriété d'homogénéité que nous attribuons au temps et à l'espace, les équations doivent être *linéaires*.

Si nous posons $x' = x - vt$, alors il est évident que pour un point au repos dans le système k, il y a un système de valeurs x', y, z indépendant du temps. Premièrement, trouvons τ comme fonction de x', y, z, t. À cet effet, nous devons exprimer en équations le fait que τ n'est nul autre que le temps donné par les horloges au repos dans le système k qui doivent être synchronisées selon la méthode décrite au § 1.

Soit un rayon lumineux envoyé au temps τ_0 de l'origine du système k selon l'axe des x dans la direction croissante de x' et qui est réfléchi de cet endroit au temps τ_1 vers l'origine des coordonnées, où il arrive au temps τ_2. Alors, nous avons

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1.$$

Si nous introduisons comme condition que τ est une fonction des coordonnées, et appliquons le principe de la constance de la vitesse de la lumière dans le système stationnaire, nous avons

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Il s'ensuit donc, lorsque x' est infiniment petit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Notons qu'au lieu de l'origine des coordonnées, nous pourrions choisir n'importe quel autre point comme point de départ pour les rayons lumineux, et en conséquence l'équation ci-dessus est vraie pour toutes les valeurs de x', y, z.

Une approche semblable appliquée aux axes des y et des z donne, quand nous prenons en compte le fait que la lumière se propage toujours le long de ces axes à une vitesse $\sqrt{V^2 - v^2}$ lorsque observée depuis le système stationnaire, ces équations :

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Puisque τ est une fonction linéaire, il suit de ces équations que

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

où a est une fonction inconnue $\phi(v)$ et pour des raisons de concision, il est fait l'hypothèse qu'à l'origine de k, t = 0 lorsque $\tau = 0$.

À l'aide de ces résultats, il est facile d'obtenir les grandeurs ξ, η, ζ, si nous exprimons (en équations) le fait que la lumière (lorsque mesurée dans le système en mouvement) se propage toujours à la vitesse constante V (tel que requis par le principe de la constance de la vitesse de la lumière et le principe de la relativité). Pour un rayon envoyé dans la direction croissante de ξ au temps $\tau = 0$, nous avons

$$\xi = V\tau$$

ou

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right).$$

Cependant, le rayon lumineux se déplace relativement à l'origine de k à une vitesse V-v, mesurée dans le système stationnaire. En conséquence, nous obtenons

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Remplaçant ces valeurs de t dans l'équation de ξ, nous obtenons

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

D'une façon analogue, si les rayon lumineux se déplacent selon les deux autres axes, nous avons

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)$$

où

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t,\ x' = 0,$$

et donc

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y$$

et

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Si pour x', nous substituons sa valeur, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau &= \varphi(v)\beta(t - \tfrac{v}{V^2}x),\\ \xi &= \varphi(v)\beta(x - vt),\\ \eta &= \varphi(v)y,\\ \zeta &= \varphi(v)z,\end{aligned}$$

où

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

et ϕ est encore une fonction inconnue de v. Si nous ne faisons aucune hypothèse sur la position initiale du système en mouvement et sur le point sans dimension τ, alors une constante additive doit être ajoutée du côté droit de l'équation.

Nous devons démontrer que tout rayon lumineux se déplace dans le système en mouvement à une vitesse *V* (telle que mesurée dans le système en mouvement) si, comme nous en avons déjà fait l'hypothèse, *V* est aussi la vitesse dans le système stationnaire. En effet, nous n'avons pas encore présenté une quelconque preuve que le principe de la constance de la vitesse de la lumière est compatible avec le principe de relativité.

Au temps τ = *t* = 0, soit une onde sphérique émise depuis l'origine commune des deux systèmes de coordonnées, onde qui se propage à une vitesse *V* dans le système *K*. Si (x, y, z) est un point atteint par l'onde, alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

À l'aide de nos équations de transformations, faisons la transformation de cette équation. Par un simple calcul nous avons

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

En conséquence, l'onde se propage dans le système en mouvement à la même vitesse V, comme une onde sphérique. Donc, nous avons démontré que les deux principes sont mutuellement compatibles.

Par les transformations, nous avons obtenu une fonction indéterminée ϕ de v, que nous allons maintenant déterminer.

Dans ce but, introduisons un troisième système de coordonnées K' , qui est en mouvement relatif par rapport au système k, le mouvement étant parallèle à l'axe des Ξ de façon à ce que la vitesse de l'origine soit $-v$ par rapport à l'axe des Ξ. Au temps $t = 0$, toutes les coordonnées des points initiaux coïncident, et pour $t = x = y = z = 0$, le temps t' du système $K' = 0$. Si nous posons que x', y', z' sont les coordonnées mesurées dans le système K' , alors par une double application des équations de transformations, nous obtenons

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x, \\ y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Puisque les relations entre x', y', z' et x, y, z ne comprennent pas explicitement le temps t, K et K' sont donc relativement au repos. Il apparaît clairement que la transformation de K à K' doit être identique. D'où

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Nous sommes prêt à calculer $\phi(v)$. Portons notre attention sur la partie de l'axe des y du système k entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ et $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$. Couvrons cette partie de l'axe des y avec une tige qui se déplace à une vitesse v relativement au système K et perpendiculairement à son axe. Les extrémités de la tige ont donc comme coordonnées dans K :

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\varphi(v)},\ z_1 = 0$$

et

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0.$$

En conséquence, la longueur de la tige mesurée dans le système K est $l / \phi(v)$. Donc, la signification de ϕ est connue. Pour des raisons de symétrie, il est maintenant évident que la longueur (mesurée dans le système stationnaire) d'une certaine tige qui se déplace perpendiculairement à son axe, peut seulement dépendre de sa vitesse, mais pas de la direction et du sens du mouvement. Donc, la longueur de la tige en mouvement, telle que mesurée dans le système stationnaire, ne change pas si v est remplacé par $-v$. Nous avons donc :

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}$$

ou

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

De ceci et des relations trouvées plus haut, il suit que $\phi(v) = 1$. Donc, les équations de transformations deviennent :

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - \tfrac{v}{V^2}x), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

où

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§ 4. La signification physique des équations obtenues pour les corps rigides et les horloges en mouvement

Supposons une sphère rigide[4] de rayon R qui est au repos relativement au système k et dont le centre coïncide avec l'origine de K, alors l'équation de la surface de cette sphère, qui se déplace à une vitesse v relativement à K, est :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Au temps $t = 0$, l'équation de cette surface s'exprime en fonction de x, y, z par

4. C'est-à-dire qui possède une forme sphérique lorsque observée dans le système stationnaire.

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2}+y^2+z^2=R^2.$$

Un corps rigide, qui montre la forme d'une sphère quand mesuré dans un système stationnaire, a en conséquence dans des conditions de mouvement — lorsqu'observé depuis le système stationnaire —, la forme d'un ellipsoïde de révolution dont les demi-axes mesurent

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Alors que les dimensions en y et z de la sphère (ou de n'importe quel autre solide) ne semblent pas modifiées par le mouvement, la dimension en x est raccourcie selon le rapport $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$; le raccourcissement est d'autant plus grand que la vitesse v est grande. Pour v = V, tous les corps en mouvement, lorsqu'observés depuis un système stationnaire, se réduisent à des plans. Pour une vitesse supraluminique, nos propositions sont dénuées de sens. Par ailleurs, dans les observations qui suivent, nous découvrirons que la vitesse de la lumière joue le rôle physique d'une vitesse infiniment grande.

Il est évident que des résultats semblables sont vrais pour des corps au repos dans un système stationnaire lorsqu'ils sont observés depuis un système en mouvement rectiligne uniforme.

Soit une horloge immobile dans le système stationnaire qui donne le temps t, et qui donne le temps τ lorsqu'immobile dans un système en mouvement. Supposons qu'elle se trouve à l'origine du système en mouvement k et réglée pour donner le temps τ. À quelle cadence avance cette horloge, lorsqu'observée du système stationnaire ?

À partir des grandeurs x, t et τ, qui réfèrent à l'endroit de cette horloge, les équations sont données par

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)$$

et

$$x=vt.$$

D'où

(traduction *Les Classiques des Sciences Sociales*)

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t.$$

Donc, l'horloge retarde de $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$secondes (lorsqu'observée du système stationnaire) par seconde ou, en négligeant les approximations du quatrième ordre et supérieurs, $\frac{1}{2}(v/V)^2$secondes.

De ceci découlent des conséquences remarquables. Supposons qu'en deux points *A* et *B* de *K*, lorsqu'observées depuis le système stationnaire, se trouvent deux horloges synchronisées. Supposons que l'horloge en *A* est mise en mouvement à la vitesse v sur une ligne qui rejoint *B*, alors lorsqu'elle arrive à *B*, les deux ne seront plus synchronisées, mais l'horloge qui s'est déplacée de *A* à *B* aura un retard sur l'horloge toujours demeurée en *B* de la quantité $\frac{1}{2}tv^2/V^2$secondes (en négligeant les approximations du quatrième ordre et supérieurs), où t est le temps pris pour accomplir le déplacement de *A* à *B*.

Nous voyons immédiatement que ce résultat est également vrai quand l'horloge se déplace de *A* à *B* en suivant une ligne polygonale, et aussi quand *A* et *B* coïncident.

Si nous faisons l'hypothèse que le résultat obtenu pour une ligne polygonale est également vrai pour une ligne courbe, nous obtenons le théorème suivant : Si à *A*, il y a deux horloges synchronisées et si nous déplaçons l'une d'elles à une vitesse constante selon une courbe fermée qui revient à *A*, le déplacement étant complété en t secondes, alors à son arrivée à *A*, cette dernière retardera de $\frac{1}{2}t(v/V)^2$secondes sur l'horloge immobile. En s'appuyant sur ce résultat, nous concluons qu'une horloge à balancier placée à l'équateur doit être plus lente par une très petite quantité qu'une autre identique placée à l'un des pôles, les autres conditions étant identiques.

§ 5. Théorème d'addition des vitesses

Soit un point en mouvement dans le système *k* (qui se déplace à une vitesse v parallèlement à l'axe des x du système *K*) qui respecte les équations

$$\xi = w_\xi \tau,$$

$$\eta = w_\eta \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

où w_ξ et w_η sont des constantes.

Trouvons le mouvement du point relativement au système *K*. Si nous insérons les grandeurs *x*, *y*, *z*, *t* dans les équations du mouvement en utilisant les équations de transformation du § 3, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{w_\xi + v}{1+\frac{v w_\xi}{V^2}} t, \\
y &= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1+\frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t, \\
z &= 0.
\end{aligned}
$$

La règle du parallélogramme pour les vitesses est seulement vraie pour l'approximation au premier ordre. Nous écrivons donc

$$
\begin{aligned}
U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\
w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2
\end{aligned}
$$

et

$$\alpha = \arctan \frac{w_\eta}{w_\xi},$$

c'est-à-dire que α est égal à l'angle entre les vitesses v et w. Alors, après un simple calcul, nous avons

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2v\ w\ \cos\alpha) - \left(\frac{v\ w\ \sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\ w\ \cos\alpha}{V^2}}.$$

On observe que v et w sont introduits dans l'expression de la vitesse de façon symétrique. Si w est aussi dans la direction de l'axe des x du système en mouvement, nous avons

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

De cette égalité, il découle que la combinaison de deux vitesses, chacune étant plus petite que *V*, donne une vitesse toujours plus petite que *V*. Si nous posons $v = V - \varkappa$ et $w = V - \lambda$, où $\varkappa$ et λ sont chacune positive et plus petite que *V*, alors

$$U = V\frac{2V - \varkappa - \lambda}{2V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Il est également évident que la vitesse de la lumière V ne peut être modifiée en lui ajoutant une valeur plus petite. Dans ce cas, nous obtenons

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{v}} = V.$$

Nous avons déduit la formule pour U dans le cas où v et w sont dans la même direction ; elle peut aussi être calculée en combinant deux transformations selon la section § 3. Si en plus des systèmes K et k du § 3, nous introduisons un troisième système k' (qui se déplace parallèlement à k), dans lequel le point initial se déplace parallèlement à l'axe des Ξ à une vitesse w, alors entre la grandeurs x, y, z, t et les grandeurs correspondantes de k' , nous obtenons un système d'équations différent des équations au § 3, en substituant à v cette grandeur

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Nous observons qu'une telle transformation parallèle forme (comme il se doit) un groupe.

Nous avons déduit la cinématique qui correspond à nos deux principes fondamentaux pour les lois qui nous sont nécessaires, et nous passons maintenant à leur application en électrodynamique.

II. PARTIE ÉLECTRODYNAMIQUE

§ 6. Transformation des équations de Maxwell-Hertz dans un espace vide. Sur la nature de la force électromotrice induite par le mouvement dans un champ magnétique

Les équations de Maxwell-Hertz dans un espace vide devraient être vraies dans un système stationnaire K, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

où (X, Y, Z) est le vecteur de la force électrique et (L, M, N), de la force magnétique.

Si nous appliquons les transformations du § 3 à ces équations et si nous ramenons les processus électromagnétiques au système de coordonnées (introduit à cet endroit) se déplaçant à une vitesse v, nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},
\end{aligned}
$$

où

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Le principe de relativité exige que les équations de Maxwell-Hertz dans un espace vide soient vraies dans le système k, si elles sont vraies dans le système K, c'est-à-dire que, pour les vecteurs des forces électriques et magnétiques ((X', Y', Z') et (L', M', N')) qui influencent les masses électriques et magnétiques du système en mouvement k, qui sont définies par leurs réactions pondéromotrices, les équations sont vraies,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}
$$

Évidemment, les deux systèmes d'équations (2) et (3) développés pour le système k devraient exprimer les mêmes choses, puisque ces deux systèmes sont équivalents aux équations de Maxwell-Hertz du système K. Puisque les deux systèmes d'équations (2) et (3) coïncident jusqu'aux symboles représentant les vecteurs, il suit que les fonctions apparaissant aux places correspondantes coïncident au facteur $\psi(v)$ près, qui dépend peut-être de v et est indépendant de ξ, η, ζ, τ. D'où les relations,

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \tfrac{v}{V}N\right), & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \tfrac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \tfrac{v}{V}M\right), & N' &= \psi(v)\beta\left(N - \tfrac{v}{V}Y\right). \end{aligned}$$

Maintenant, si la réciproque de ce système d'équations est formée, premièrement en résolvant les équations que nous venons d'obtenir, deuxièmement en appliquant les équations à la transformation inverse (de k à K), qui a comme caractéristique la vitesse $-v$, il suit, en sachant que les deux systèmes d'équations ainsi calculés doivent être identiques :

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Toujours pour des raisons de symétrie[5]

$$\varphi(v) = \varphi(-v),$$

d'où

$$\varphi(v) = 1,$$

et nos équations prennent la forme

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \tfrac{v}{V}N\right), & M' &= \beta\left(M + \tfrac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \tfrac{v}{V}M\right), & N' &= \beta\left(N - \tfrac{v}{V}Y\right). \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'interprétation de ces équations, nous déclarons ceci. Soit une masse ponctuelle d'électricité d'une grandeur unitaire dans le système stationnaire K,

5. Si par exemple $X = Y = Z = L = M = 0$ et $N \neq 0$, alors pour des raisons de symétrie il est clair que, en changeant le signe de v sans modifier sa valeur absolue, Y' doit aussi changer de signe sans changer de valeur absolue.

c'est-à-dire, dans ce système stationnaire, qu'elle exerce une force de 1 dyne sur un objet similaire placé à une distance de 1 cm. En vertu du principe de relativité, cette masse électrique mesure aussi une grandeur « unité » dans le système en mouvement. Si cette masse électrique est au repos dans le système stationnaire, alors la force exercée sur elle est équivalente au vecteur de la force électrique (X, Y, Z). Mais si cette masse électrique est au repos dans le système en mouvement (du moins au moment où elle est observée), alors la force qui s'exerce sur elle et mesurée dans le système en mouvement est équivalente au vecteur (X', Y', Z'). La première des trois systèmes d'équations (1), (2) et (3) s'exprime alors comme suit :

1. Si une masse ponctuelle et unitaire d'électricité se déplace dans un champ électromagnétique, alors en plus de la force électrique, une « force électromotrice » agit sur elle, qui, en négligeant les termes de second ordre et supérieurs de v/V, est équivalente au produit vectoriel de la vitesse de la masse ponctuelle et de la force magnétique divisé par la vitesse de la lumière. (Ancien mode d'expression.)

2. Si une masse ponctuelle et unitaire d'électricité se déplace dans un champ électromagnétique, alors la force qui agit sur elle est équivalente à la force électrique qui existe à la position de la masse unitaire, que nous obtenons par la transformation du champ en un système de coordonnées qui est au repos relativement à la masse électrique unitaire. (Nouveau mode d'expression.)

Des théorèmes semblables faisant appel aux « forces magnétomotrices » sont vrais. Dans la théorie exposée, nous observons que la force électromagnétique joue un rôle auxiliaire, qui doit son introduction à la circonstance que les forces électrique et magnétique n'existent pas indépendamment de la nature du déplacement dans le système de coordonnées.

De plus, il est clair que l'asymétrie, mentionnée dans l'introduction et qui apparaît quand nous discutons du courant engendré par le déplacement relatif d'un aimant et d'un conducteur, disparaît. Également, la question de l'« origine » des forces électromotrices électromagnétiques (machine homopolaire) perd tout son sens.

§ 7. Théorie du principe de Doppler et de l'aberration

Supposons une source d'ondes électromagnétiques[NdT 6] dans le système K à une grande distance de l'origine, modélisée avec une bonne approximation dans une partie de l'espace qui contient l'origine par les équations :

$$X = X_0 \sin \Phi, \quad L = L_0 \sin \Phi,$$

$$Y = Y_0 \sin \Phi, \quad M = M_0 \sin \Phi, \quad \Phi = \omega \left(t - \frac{ax+by+cz}{V} \right),$$

$$Z = Z_0 \sin \Phi, \quad N = N_0 \sin \Phi.$$

Ici (X_0, Y_0, Z_0) et (L_0, M_0, N_0) sont les vecteurs qui déterminent l'amplitude du train d'ondes et (a, b, c) sont les cosinus directeurs des normales à l'onde.

Questionnons-nous sur la composition de ces ondes, quand elles sont observées par un observateur au repos dans le système en mouvement *k*. En appliquant les équations de transformation obtenues au § 6 pour les forces électrique et magnétique, et les équations de transformation obtenues au § 3 pour les coordonnées et le temps, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta(Y_0 - \tfrac{v}{V} N_0) \sin \Phi', & M' &= \beta(M_0 + \tfrac{v}{V} Z_0) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta(Z_0 + \tfrac{v}{V} M_0) \sin \Phi', & N' &= \beta(N_0 - \tfrac{v}{V} Y_0) \sin \Phi', \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right),$$

où

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta(1 - a\tfrac{v}{V}), \\ a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}}, \\ b' &= \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}, \\ c' &= \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}. \end{aligned}$$

De l'équation donnant ω' , il résulte que si un observateur se déplace à une vitesse v relativement à une source lumineuse située à une distance infinie qui émet des ondes d'une fréquence ν, de telle façon que la ligne qui joint la source de la lumière et l'observateur fait un angle ϕ avec la vitesse de l'observateur rapportée à un système de coordonnées qui est stationnaire en regard de la source, alors la fréquence ν' perçue par l'observateur se calcule par la formule :

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

C'est le principe de Doppler pour toute vitesse.

Si $\phi = 0$, alors l'équation prend une forme plus simple :

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Nous observons que — contrairement à la conception courante — si $v = -V$, alors $\nu' = \infty$NdT 7.

Si ϕ' est l'angle entre la normale de l'onde (direction du rayon) dans le système en mouvement et le segment « source-observateur lumière », l'équation pour a' prend la forme

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Cette équation exprime la loi de l'aberration sous sa forme la plus générale. Si $\phi = \pi/2$, alors elle prend la forme simple :

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Nous devons toujours trouver l'amplitude des ondes qui apparaissent dans le système en mouvement. Si A et A' sont les forces (électrique et magnétique) mesurées dans les systèmes stationnaire et en mouvement, nous avons

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Si $\phi = 0$, alors elle se réduit à la forme simple

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

En s'appuyant sur ces équations, il semble que pour un observateur, qui se déplace à la vitesse V vers la source de lumière, cette source lui apparaîtra infiniment intense.

§ 8. Transformation de l'énergie des rayons lumineux. Théorie de la pression de radiation exercée sur un miroir parfait

Puisque $A^2/8\pi$ est égal à l'énergie de la lumière par unité de volume, nous devons (selon le principe de relativité) considérer $A'^2/8\pi$ comme l'énergie de la lumière dans le système en mouvement. En conséquence, A'^2/A^2 définit le rapport entre les énergies d'un complexe de lumière NdT 8 borné « mesuré lorsqu'en mouvement » et « mesuré lorsque stationnaire », les volumes du complexe de lumière mesurés dans K et k étant égaux. Or, ce n'est pas le cas. Si a, b, c sont les cosinus directeurs des normales à l'onde lumineuse dans le système stationnaire, alors aucune énergie ne traverse les éléments de la surface sphérique

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2$$

qui se déplace à la vitesse de la lumière. Nous pouvons donc affirmer que cette surface contient toujours le même complexe de lumière. Analysons la quantité d'énergie que cette surface renferme, quand elle est observée du système k, c'est-à-dire l'énergie du complexe de lumière relativement au système k.

Observée depuis le système en mouvement, la surface sphérique devient ellipsoïdale et respecte, au temps $\tau = 0$, l'équation :

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Si S désigne le volume de la sphère et S' le volume de cet ellipsoïde, alors un simple calcul montre que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Si E représente l'énergie lumineuse mesurée dans le système stationnaire et E' l'énergie mesurée dans le système en mouvement, bornées par les surfaces décrites plus haut, alors

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Si $\phi = 0$, nous obtenons une formule plus simple :

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

Remarquons que l'énergie et la fréquence du complexe de lumière varient selon la même loi que l'état de mouvement de l'observateur.

Soit un parfait miroir réfléchissant dans le plan de coordonnées *ξ=0*, à partir duquel l'onde plane étudiée dans le paragraphe précédent est réfléchie. Demandons-nous quelle pression de radiation s'exerce sur la surface réfléchissante, ainsi que la direction, la fréquence et l'intensité de la lumière après la réflexion.

Soit la lumière incidente définie par les grandeurs A, $\cos \phi$, ν (dans le système K). Observées de k, nous avons les grandeurs correspondantes :

$$\begin{aligned} A' &= A\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \\ \cos\varphi' &= \frac{\cos\varphi-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}, \\ \nu' &= \nu\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Pour la lumière réfléchie, nous obtenons, quand le phénomène est observé du système k :

$$\begin{aligned} A'' &= A', \\ \cos\varphi'' &= -\cos\varphi', \\ \nu'' &= \nu'. \end{aligned}$$

En appliquant une transformation inverse au système stationnaire K, nous obtiendrons pour la lumière réfléchie :

(traduction *Les Classiques des Sciences Sociales*)

$$A''' = A''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi''+\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi-2\frac{v}{V}}{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{V}\right)^2}.$$

L'énergie qui tombe sur une unité de surface du miroir par unité de temps (mesurée dans le système stationnaire) est évidemment $(A^2 / 8\pi)(V\cos\phi - v)$. La quantité d'énergie qui en rayonne par unité de surface du miroir par unité de temps est $(A'''^2 / 8\pi)(-V\cos\phi''' + v)$. La différence entre ces deux expressions est, selon le principe de l'énergie, la quantité de travail accomplie par la pression de radiation par unité de temps. Si nous la posons égale à $P.v$, où P est la pression de radiation, nous avons

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi-\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Par l'approximation au premier ordre, nous obtenons

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

qui est en accord avec les observations et d'autres théories.

Tous les problèmes d'optique des corps en mouvement peuvent être résolus en appliquant les méthodes exposées ici. Le point crucial est que toutes les forces électriques et magnétiques de la lumière, qui sont influencées par un corps en mouvement, devraient être transformées dans un système de coordonnées stationnaire relativement au corps. De cette façon, tous les problèmes optiques de corps en mouvement seraient réduits à une suite de problèmes d'optique de corps au repos.

§ 9. Transformations des équations de Maxwell-Hertz en ce qui concerne les courants de convection

Commençons par ces équations :

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho+\frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho+\frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho+\frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

où

$$\varrho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

indique 4π fois la densité de l'électricité et (u_x, u_y, u_z) est le vecteur-vitesse de l'électricité. Si nous supposons que les masses électriques sont liées de façon permanente à de petits corps rigides (ions ou électrons, par exemple), alors ces équations forment le fondement électromagnétique de l'électrodynamique et de l'optique des corps en mouvement de Lorentz.

Si ces équations, vraies dans le système *K*, sont transformées pour le système *k* à l'aide des équations de transformations données aux § 3 et § 6, alors nous obtenons les équations :

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\varrho'+\frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\varrho'+\frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\varrho'+\frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi}$$

où

$$\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \varrho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-\frac{v\;u_x}{V^2}\right)\varrho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

Puisque le vecteur (u_ξ, u_η, u_ζ) n'est rien d'autre que la vitesse de la masse électrique mesurée dans le système *k*, qui est une conséquence du théorème d'addition des vitesses du § 5, alors il est démontré que, en prenant notre principe cinématique comme base, le fondement électromagnétique de la théorie de Lorentz de l'électrodynamique des corps en mouvement correspond au principe de relativité.

Nous pouvons brièvement remarquer qu'une loi importante découle aisément des équations développées : si un corps électriquement chargé se déplace de quelque façon que ce soit dans l'espace et si sa charge est invariable, quand observée depuis un système qui se déplace de la même façon, alors la charge demeure constante même si elle observée depuis le système stationnaire *K*.

§ 10. Dynamique de l'électron (lentement accéléré)

Supposons qu'une particule ponctuelle qui possède la charge électrique ε (que nous appellerons dorénavant « électron ») se déplace dans un champ électromagnétique. Nous faisons l'hypothèse suivante pour sa loi de déplacement.

Si l'électron est au repos à une période de temps bien définie, alors pendant la prochaine parcelle de temps, le mouvement respecte les équations

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{dt^2} &= \epsilon X, \\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} &= \epsilon Y, \\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} &= \epsilon Z, \end{aligned}$$

où x, y, z sont les coordonnées de l'électron et μ sa masse, du moment qu'il se déplace lentement.

Supposons que l'électron se déplace à une vitesse v à une certaine période de temps. Analysons les lois selon lesquelles l'électron se déplacera pendant la parcelle de temps qui suit immédiatement.

Sans modifier la portée générale de notre discussion, nous pouvons et ferons l'hypothèse que, au moment que nous analysons, l'électron est à l'origine du système de coordonnées, puis se déplace à la vitesse v selon l'axe des x du système *K*. Il est évident qu'à ce moment ($t=0$), l'électron est au repos relativement au système *k*, qui se déplace parallèlement à l'axe des x à la vitesse constante v.

À partir des hypothèses faites plus haut, en association avec le principe de relativité, il est évident qu'observé depuis le système *k*, l'électron — pendant la parcelle de temps immédiatement consécutive (pour une petite valeur de *t*) — se déplace selon les équations

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \epsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \epsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \epsilon Z',$$

où les symboles ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' se rapportent au système *k*. Si nous fixons $t = x = y = z = 0$ et $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, alors les équations de transformation données aux §§ 3 et 6 sont vraies. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau &= \beta\left(t - \tfrac{v}{V^2}x\right), & & \\
\xi &= \beta(x - vt), & X' &= X, \\
\eta &= y, & Y' &= \beta(Y - \tfrac{v}{V}N), \\
\zeta &= z, & Z' &= \beta(Z + \tfrac{v}{V}M).
\end{aligned}$$

À l'aide de ces équations, nous pouvons transformer les équations du mouvement plus haut du système *k* au système *K* et obtenir :

$$(A) \qquad \begin{cases}
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X \\
\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right) \\
\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right).
\end{cases}$$

Questionnons-nous, suivant la méthode habituelle de calculs, sur les masses longitudinale et transversale d'un électron en mouvement. Nous réécrivons les équations (A) sous la forme

$$\begin{aligned}
\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} &= \epsilon X &&= \epsilon X', \\
\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} &= \epsilon\beta\left(Y - \tfrac{v}{V}N\right) &&= \epsilon Y', \\
\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} &= \epsilon\beta\left(Z + \tfrac{v}{V}M\right) &&= \epsilon Z'
\end{aligned}$$

(traduction *Les Classiques des Sciences Sociales*)

et observons tout de suite que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ sont les composantes de la force pondéromotrice qui agit sur l'électron et sont considérées dans un système en mouvement qui, à ce moment, se déplace à la même vitesse que l'électron. (Cette force peut, par exemple, être mesurée par une balance à ressort au repos dans ce système.) Si nous appelons brièvement cette force la « force qui agit sur l'électron », et continuons avec cette équation :

Valeur de la masse × valeur de l'accélération = Valeur de la force,

et si nous définissons de plus que les accélérations sont mesurées dans le système stationnaire *K*, alors à partir des équations plus haut, nous obtenons :

$$\text{Masse longitudinale} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{Masse transversale} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Naturellement, quand la force et l'accélération sont définies autrement, d'autres valeurs sont obtenues pour la masse. Donc, nous voyons que nous devons procéder avec beaucoup de précautions lorsque nous comparons différentes théories du mouvement de l'électron.

Observons que ce résultat sur la masse est également vrai pour une masse de matière pondérable ; parce qu'un point matériel pondérable peut être converti en électron (pour nos sens) en lui ajoutant une charge électrique *aussi petite que l'on veut*.

Déterminons maintenant l'énergie cinétique d'un électron. Si l'électron se déplace à partir de l'origine des coordonnées d'un système *K* à la vitesse initiale de 0 de façon régulière selon l'axe des x sous l'action d'une force électrostatique *X*, alors il est évident que l'énergie tirée du champ électrostatique est la valeur $\int \varepsilon X\, dx$. Puisque l'électron devrait être accéléré lentement et donc qu'aucune énergie n'est perdue sous la forme de radiation, alors l'énergie tirée du champ électrostatique doit égaler l'énergie *W* du déplacement. Considérant l'ensemble du phénomène de mouvement à l'étude, la première des équations de (A) est vraie. Nous avons :

$$W = \int \epsilon X\, dx = \int_0^v \beta^3 v\, dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Lorsque $v=V$, *W* est infiniment grand. Comme nos résultats antérieurs le montrent, toute vitesse supraluminique est impossible.

En tant que conséquence des arguments écrits plus haut, cette expression pour l'énergie cinétique doit aussi être vraie pour les masses pondérables.

Nous sommes à même d'énumérer les caractéristiques du mouvement des électrons qui peuvent être vérifiées expérimentalement, lesquelles découlent du système d'équations (A).

1. De la deuxième équation en (A), il découle qu'une force électrique Y et une force magnétique N produisent la même déflexion d'un électron se déplaçant à la vitesse v quand $Y = N.v/V$. En conséquence, nous voyons qu'il est possible de mesurer la vitesse d'un électron en calculant le rapport de la déflexion magnétique A_m et de la déflexion électrique A_e, en accord avec notre théorie pour toute vitesse arbitraire, en appliquant la loi :

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Cette relation peut être testée expérimentalement car la vitesse de l'électron peut être directement mesurée à l'aide, par exemple, de champs électriques et magnétiques oscillant rapidement.

2. À partir de la valeur de l'énergie cinétique de l'électron, il suit que si ce dernier subit une différence de potentiel P, cette dernière est liée à la vitesse v par la relation suivante :

$$P = \int X\, dx = \frac{\mu}{\epsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Nous calculons le rayon de courbure R du chemin, où la force magnétique N est la seule force de déflexion qui agit perpendiculairement à la vitesse de projection. De la seconde équation en (A), nous obtenons :

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ou

$$R = V^2 \frac{\mu}{\epsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

(traduction *Les Classiques des Sciences Sociales*)

Ces trois relations expriment complètement la loi du mouvement de l'électron selon la théorie exposée plus haut.

En terminant, je tiens à souligner que mon ami et collègue M. Besso m'a prêté son concours pendant que je travaillais au problème discuté ici, et que je lui suis redevable de suggestions précieuses.

Berne, juin 1905

(Reçu le 30 juin 1905.)

NOTES DU TRADUCTEUR

1. En langage moderne, il s'agit de l'éther luminifère.
2. Par « espace vide », il faut comprendre « vide parfait », que l'on peut presque assimiler à l'espace intersidéral dénué de toute matière.
3. En anglais, il est écrit « *measuring rod* », qui se traduit littéralement par « tige à mesurer ». Le terme « règle à mesurer » est plus près du sens recherché.
4. Dans sa traduction, Maurice Solovine préfère « mouvement de translation uniforme », selon le nom de l'une des transformations géométriques. La terminologie physique préfère « mouvement rectiligne uniforme ».
5. En langage moderne, il s'agit d'un système de coordonnées cartésiennes en 3 dimensions.
6. Dans le texte en anglais, il est écrit « *electrodynamic* », mais dans l'article, il est seulement fait mention des théories de Maxwell, Hertz ou Lorentz, qui traitent toutes d'ondes électromagnétiques.
7. L'équation est corrigée selon ce qui est écrit dans la traduction de Maurice Solovine.
8. Selon Yves Pierseaux dans *La "Structure fine" de la Relativité Restreinte* (Harmattan, 1er juillet 1999, p. 300), Einstein introduit le terme « complexe de lumière » à ce moment-ci de l'article, puis, après la publication de cet article, il préfère « système d'ondes planes ». Le langage moderne préfère « paquet d'onde ».