Lambert et l'irrationalité de π (1761)

par Alain Juhel, agrégé de mathématiques,
professeur en Spéciales MP au lycée Faidherbe de Lille

Le Contexte

Le texte de 1761 de Lambert que nous étudions ici occupe une position charnière dans l'histoire de l'irrationalité et de la transcendance.

1. Dans l'histoire du nombre π, cette première preuve d'irrationalité est évidemment capitale.
2. Elle étend la preuve d'irrationalité de e donnée par Euler (1737) à celle de toutes ses puissances.
3. Elle marque le début de la formulation précise de la notion de transcendance, et pose la conjecture correspondante pour les deux nombres remarquables e et π, problèmes que résoudront respectivement Hermite (1872) et Lindemann (1882).
4. Elle constitue donc à ce titre un jalon essentiel sur la route de la réponse négative au problème de la quadrature du cercle : c'est le coup d'accélérateur sur un problème qui stagne depuis son exposition au Ve siècle avant J.-C.
5. Au passage, Lambert y définit ce que nous appelons aujourd'hui les fonctions hyperboliques, en justifiant, figure à l'appui, que l'on parle d'une trigonométrie hyperbolique.

Si un mathématicien ne se méprend pas sur la valeur du texte de Lambert, c'est bien Charles Hermite : après sa victoire sur la transcendance de e, ne dit-il pas, en introduction à une démonstration simplificatrice du résultat de Lambert : « Tout ce que je puis, c'est de refaire ce qu'a déjà fait Lambert, seulement d'une autre manière... »

Lexique

Irrationalité : un nombre est rationnel lorsqu'il est quotient d'entiers, irrationnel sinon.
Transcendance : un nombre est transcendant lorsqu'il n'est racine d'aucune équation à coefficients entiers, de quelque degré que ce soit.
Quadrature du cercle : Construire, à la règle et au compas, un carré d'aire égale à celle d'un cercle de rayon unité ; cela revient à construire ainsi $\sqrt{\pi}$

L'HOMME

Johann Lambert est né à Mulhouse (en... Suisse, à cette époque) en 1728. Autodidacte, il fut invité par Euler à rejoindre l'Académie de Berlin en 1764; il est décédé dans cette ville en 1777.

Les plus célèbres travaux de Lambert, outre le mémoire étudié, portent sur la géométrie non euclidienne, la cartographie (la projection conforme de Lambert reste une des plus employées par les géographes), l'étude de la perspective (incluant la construction d'un appareil mécanique dénommé « perspectographe »).

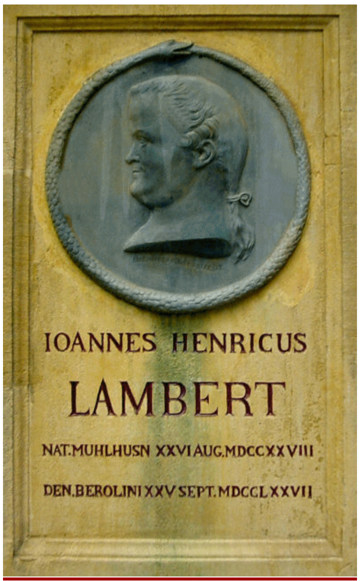


***Figure 1 : Colonne Lambert à Mulhouse**, sa ville natale (à gauche). Elle porte une méridienne en souvenir de ses travaux d'astronomie. Détail, à droite : Médaillon en l'honneur de Lambert figurant sur la colonne.*

LA MÉTHODE

L'outil incontournable de l'époque des pionniers, c'est la théorie des fractions continues. Euler l'avait employée, le premier, pour prouver l'irrationalité de *e* en 1737 [1]; rien n'est plus naturel une fois que l'on s'est familiarisé avec l'objet. Si le processus de divisions successives ne se termine pas lorsqu'on répète l'algorithme suivant[2]:

$$y = x_0 - [x_0] \longrightarrow x_1 = \frac{1}{y} \longrightarrow x_0 = [x_0] + \frac{1}{x_1}$$

où $[x_0]$ désigne, suivant l'usage, la partie entière de x_0, alors le nombre initial x_0 est irrationnel : la non-terminaison en est la preuve ! Euler n'avait donc eu qu'à obtenir – certes, un peu mystérieusement – une jolie fraction continue illimitée, mais aux termes parfaitement réguliers, pour y lire l'irrationalité de *e* :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}}$$

ou, écrit de manière plus compacte,

$$[2,1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots 1,1,2n,1,1\ldots]$$

Malheureusement, π se révèle plus coriace. On peut, comme nous l'avons fait avec l'exemple numérique de l'encadré ci-dessous, obtenir, à partir de valeurs décimales de plus en plus précises, autant de termes que l'on voudra ; mais aucune régularité dans ce développement n'est apparue, ni à Euler, ni à aucun autre mathématicien... π apparaît ainsi comme un nombre « plus compliqué » que *e* : la suite des décimales, soit le développement en série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

est imprévisible pour *e* comme pour π, mais du moins *e* retrouvait-il une forme régulière avec un développement d'une autre forme : il n'en va plus de même pour π.

1. *De Fractionibus continuis Dissertatio*, 1737.
2. À partir de x_0, on construit x_1, puis à partir de x_1 on construit x_2 par le même algorithme, etc.

Fractions Continues

Tout nombre rationnel peut s'écrire en x = a + 1/y, a entier et y >1 ; on peut alors réitérer le procédé, qui revient à la répétition de l'algorithme de division d'Euclide. Ainsi, soit à développer x = 314159/100000 :

- 100000 = 7 x 14159 + 887
- 14159 = 15 x 887 + 854
- 887 = 1 x 854 + 33
- 854 = 25 x 33 + 29
- 33 = 1 x 29 + 4
- 29 = 7 x 4 + 1

L'algorithme d'Euclide se termine, et il en est de même pour tout rationnel. Ainsi :

$$x = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}}}}}}$$

que l'on écrit par commodité :

$$x = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{1} \quad \text{ou} \quad [3,7,15,1,25,1,7,1]$$

Les fractions "intermédiaires" :

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},\quad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106},\quad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$$

portent le nom suggestif de **réduites**.

Plus généralement, on peut étudier des fractions à termes quelconques,

$$x = \frac{a_1}{b_1 +}\,\frac{a_2}{b_2 +} \ldots \frac{a_k}{b_k +} \ldots$$

dont les réduites successives (fractions tronquées au rang *n*) sont calculées par l'algorithme suivant, intéressant puisqu'il ne comporte aucune division :

$$A_{n+1} = b_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}$$

$$B_{n+1} = b_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}$$

L'attaque exige donc une stratégie plus élaborée; c'est là que réside toute l'originalité du travail de Lambert. En voici les ingrédients essentiels:

1. Abandonner les fractions continues régulières (à numérateur 1) pour des fractions à numérateurs quelconques ;
2. Formuler un critère d'irrationalité associé ;
3. Les utiliser pour développer une fonction trigonométrique, la tangente – et non plus simplement un nombre ;
4. Greffer un raisonnement par l'absurde : si $\pi/4$ était rationnel, tan $(\pi/4) = 1$ ne le serait pas.

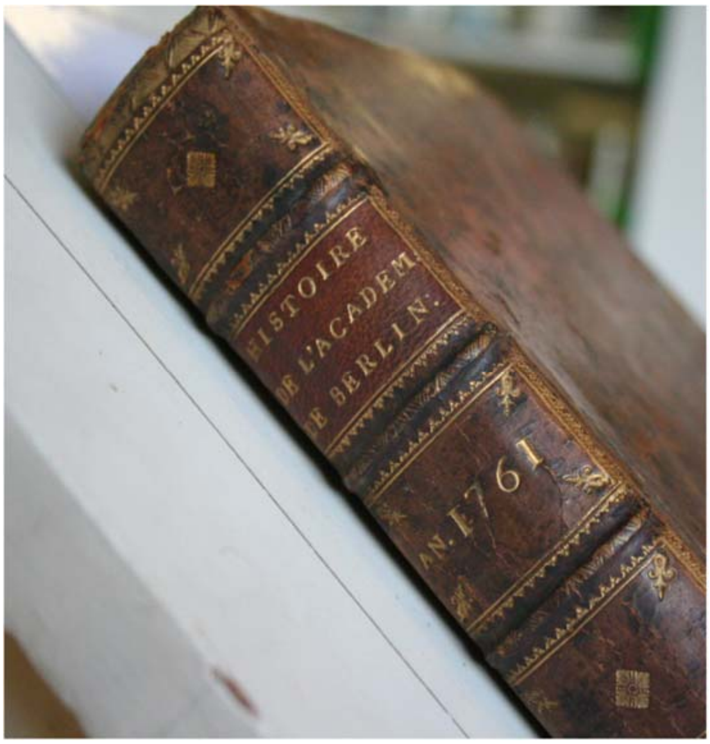
> *Il s'agit de faire voir, que toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque est commensurable au rayon, la tangente de cet arc lui est incommensurable ; & que réciproquement, toute tangente commensurable n'est point celle d'un arc commensurable* (§2)

Comme dans les autres questions de ce type, ce merveilleux outil sera ultérieurement éliminé sur l'autel des simplifications: la preuve d'Euler est supplantée par celle attribuée à Fourier (1815)[3] ; Liouville efface lui-même, dans son deuxième article sur la construction de transcendants remarquables (1844), les fractions continues qu'il employait dans un premier temps[4]; Hermite, enfin, donne, dans une lettre à Borchardt (1873) des preuves de l'irrationalité de π et π^2 où ne figure plus aucune fraction continue, quoiqu'elles portent, dans leur inspiration, la marque indélébile d'approximations rationnelles construites à partir de fractions continues. Cela ne va d'ailleurs pas sans occasionner quelques regrets de la part d'Hermite[5]:

> *L'expression de Lambert, que j'évite ainsi d'employer, n'en reste pas moins un résultat du plus grand prix, et qui ouvre la voie à des recherches curieuses et intéressantes.*

3. Voir le texte de Janot de Stainville dans *BibNum* (septembre 2008).
4. Voir le texte de Liouville dans *BibNum* (septembre 2008).
5. *Sur l'Irrationalité de la Base des Logarithmes Hyperboliques.* Report of the British Association for Advancement of Science, 43rd Meeting, 1873

Au fil du texte



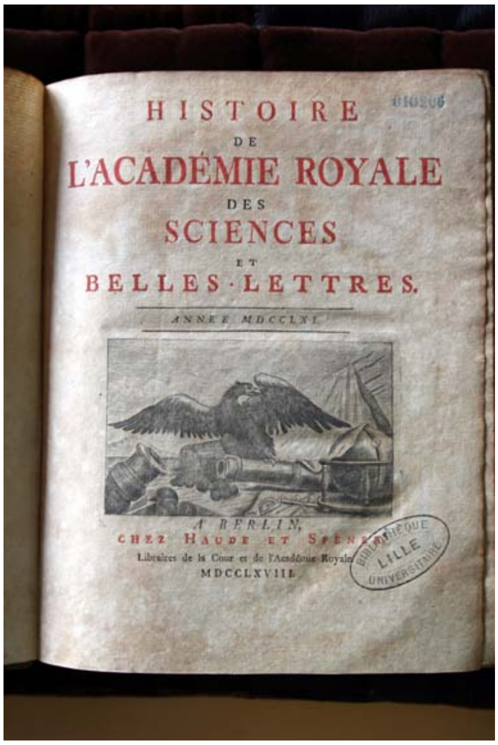


Figure 2 : *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (1761), dont est extrait le texte de Lambert. Les comptes-rendus sont à l'époque en français. (exemplaire de la bibliothèque lettres et sciences humaines de l'Université de Lille).*

L'article est long, mais, nous prévient Lambert à la fin du §2, c'est d'abord le prix à payer pour que la rigueur du raisonnement soit inattaquable. Et, une fois ce principe accepté, le coût supplémentaire pour quelques résultats remarquables devient trop faible pour qu'on s'en prive ! Ce sont justement ceux-ci qui font de ce texte bien plus qu'une simple preuve d'irrationalité... Dégageons le plan et les paragraphes-clefs auxquels on pourra limiter une première approche du texte, afin de ne pas s'y perdre.

Présentation Générale : §1 à 4

Lambert insiste sur la nécessité d'une rigueur absolue, en raison de l'enjeu : la question de la quadrature du cercle. Il présente le problème après avoir donné une série classique pour π, assortie d'une argumentation vague, comme pour donner au lecteur un exemple... de ce qu'il se refuse à faire.

Quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas davantage. Mais ces cas ne sont pas ceux de la quadrature du cercle.

Et de rappeler le paradoxe de ces quadrateurs acharnés (l'Académie des Sciences en viendra, en 1775, à refuser l'examen des solutions proposées dans l'espoir de leur éviter de sombrer dans la folie) :

La plupart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraîne quelquefois jusqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourrait on croire, qu'ils se trouveraient satisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut tout autre chose.

Ce texte sera, effectivement, d'une rigueur exemplaire et tranchera fortement, en cela, avec ceux qui l'encadrent, qu'il s'agisse d'Euler avant lui, ou de Legendre après lui (1795), qui laissent des zones d'ombre, tant sur leurs inspirations que sur la convergence des fractions qu'ils emploient.

Développement de *tanx*, acte 1 : le plaisir de la découverte, § 5 à 14

Lambert part des deux séries classiques donnant *sin*υ et *cos*υ, forme leur quotient, et "tente la division". Imaginons que l'on pose

$$\tan\ \upsilon = \frac{\upsilon - \upsilon^3/6 + R_1}{1 - \upsilon^2/2 + R_2} \quad \text{et} \quad F(\upsilon) = \frac{\upsilon - \upsilon^3/6}{1 - \upsilon^2/2}$$

Dans le cas de *F* (obtenue en ignorant les restes), nous saurions fort bien opérer en vue d'un développement en fraction continue limitée. Il suffirait de remplacer les nombres par des polynômes en υ, la division euclidienne des entiers par celle des polynômes, et l'on obtiendra le début de la fraction :

$$F(\upsilon) = \cfrac{\upsilon}{1 - \cfrac{\upsilon^2}{3 - \rho(\upsilon)}}$$

Aller jusqu'aux puissances 5 au numérateur et 4 au dénominateur confirmera les 1 et 3 obtenus, et fera apparaître un nouveau terme, etc. À cette intuition qui le guide, Lambert ajoute un calcul soigné des restes successifs ; voilà donc le développement trouvé, mais pas démontré, car, Lambert en est bien conscient – beaucoup plus qu'Euler – dire « et ainsi de suite, indéfiniment » ne suffit pas.

Détail du calcul

$$F(\upsilon) = \frac{\upsilon - \upsilon^3/6}{1 - \upsilon^2/2} = \upsilon \times \frac{1 - \upsilon^2/6}{1 - \upsilon^2/2} = \frac{\upsilon}{G(\upsilon)} \text{ avec } G(\upsilon) = \frac{1 - \upsilon^2/2}{1 - \upsilon^2/6}$$

En opérant par division par puissances croissantes :

$$1 - \upsilon^2/2 = \left(1 - \upsilon^2/6\right) \times 1 - \upsilon^2/3$$

$$G(\upsilon) = 1 - \frac{\upsilon^2/3}{1 - \upsilon^2/6} = 1 - \frac{\upsilon^2}{3 - \upsilon^2/2} \text{ donc } F(\upsilon) = \frac{\upsilon}{G(\upsilon)} = \frac{\upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon^2}{3 - \upsilon^2/2}}$$

Ce que l'on devrait pouvoir en faire... §15, 16

Le lecteur aura sans doute remarqué que nous avons travaillé avec υ, alors que Lambert semble compliquer encore en effectuant ses manipulations avec $w = 1/\upsilon$. La raison apparaît ici:

> *Le problème que propose Euclide, c'est de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers [...] cette dernière supposition a lieu toutes les fois que* $1/\upsilon$ *est un nombre entier.*

Dans ce cas, sa preuve d'irrationalité est faite : il n'a manipulé que des entiers, l'algorithme ne s'arrête pas, donc le nombre *tan*υ

> *sera une quantité irrationnelle toutes les fois que l'arc* υ *sera une partie aliquote du rayon.*

Et Lambert de conclure au début du §16:

> *Voilà donc ce à quoi se borne l'usage que l'on peut faire de la proposition d'Euclide.*

Car le raisonnement par l'absurde qu'il envisage supposera $\pi/4$ rationnel (commensurable au rayon) mais pas forcément à numérateur 1 (partie aliquote).

> *Il s'agit maintenant de l'étendre à tous les cas où l'arc est commensurable au rayon.*

Lambert nous avait, en fait, prévenu dès le §3:

Mais il convient de remarquer que, tandis qu'Euclide ne l'applique qu'à des nombres entiers & rationnels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon...

Développement de *tanx*, acte 2 : former les fractions réduites, §17 à 22

Notre héros n'a plus qu'à repartir à l'assaut. L'avantage de son heuristique, c'est qu'il dispose d'une fraction continue qu'il peut considérer *a priori*, en s'assignant le but de prouver qu'elle converge, et que c'est vers tan υ:

Or, en retenant des quotients w,3w, 5w, &c. autant qu'on voudra on n'aura qu'à en faire la réduction, pour avoir des fractions qui exprimeront la tangente de v d'autant plus exactement qu'on aura retenu un plus grand nombre des quotients.

Il exhibe les premières réduites: c'est un calcul inverse de nos développements simplifiés. Puis il démontre la formule (classique) de calcul séparé des numérateurs et dénominateurs de la réduite A_n/B_n, que nous écririons en termes modernes

$$A_{n+1} = (2n+1).w\ A_n - A_{n-1}$$

$$B_{n+1} = (2n+1).w\ B_n - B_{n-1}$$

L'algorithme est matérialisé dans un tableau de calcul des premiers numérateurs et dénominateurs partiels.

Développement de *tanx*, acte 3 : les exigences de la rigueur, § 23 à 34

Dans ce tableau, il découvre la forme explicite générale de A_n et B_n. Mais on ne découvre bien que ce qu'on cherche... Ce qu'il espère, en vue de l'étude de convergence, c'est trouver un A_n proche de la série du sinus, numérateur de *tan* υ, et un B_n proche de la série du cosinus, dénominateur de *tan* υ. Guidé par ce fanal, il peut en mener la détermination à bon port, là où un calculateur, même expérimenté, s'égarerait dans le brouillard opératoire... et pour tout *n*, car il ne saurait être question de généraliser sans preuve :

Il conviendra, pour éviter encore ici toute espèce d'induction, d'en donner et d'en démontrer l'expression générale.

Il y parvient au §29 pour le dénominateur, au §30 pour le numérateur, par exemple:

$$\frac{1}{1\times 3\times 5\ldots\times(2n-1)}A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\upsilon^{2k-1}$$

La seule lacune de sa preuve est sans doute à ce point : il fait tendre n vers l'infini, et se prévaut du fait que

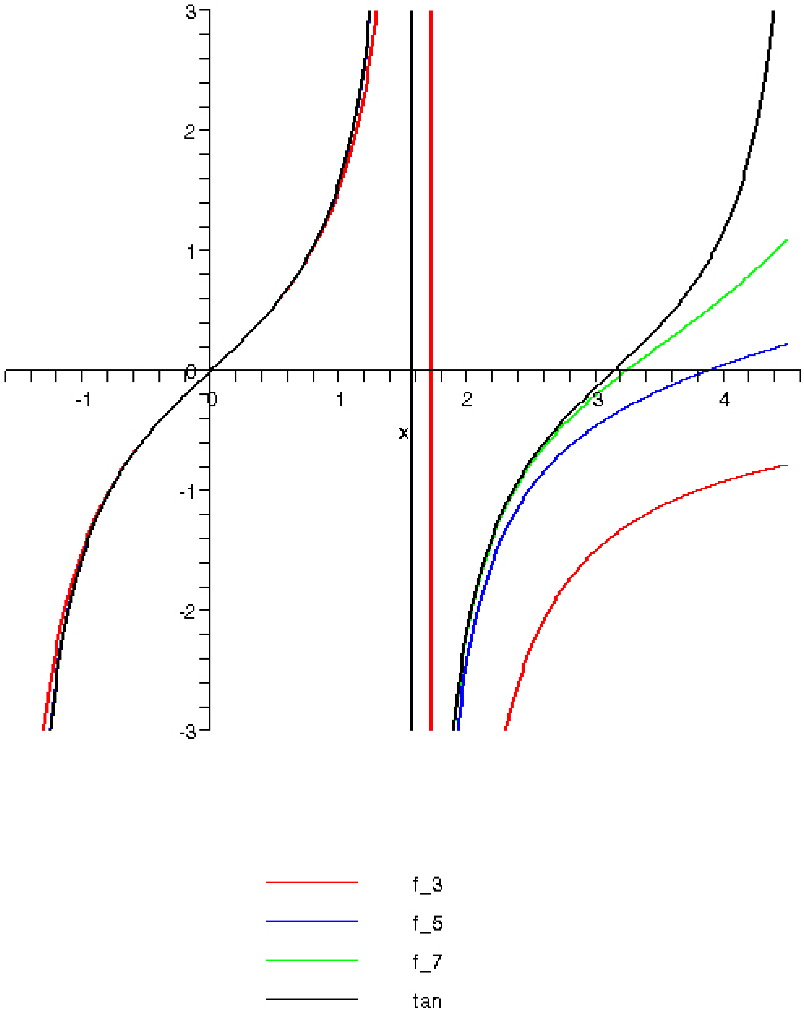
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{k,n} = 1$$

pour conclure ; cependant Lebesgue[6] a montré que la rédaction pouvait être complétée très rigoureusement. D'ailleurs, il souligne pour terminer l'excellente qualité de convergence des approximants ; on peut aujourd'hui – plus aisément qu'à l'époque de Lebesgue – l'apprécier à l'aide d'un tracé réalisé par ordinateur. Il qualifie l'écart entre tan υ et la réduite A_n / B_n en ces termes :

> *Toutes ces suites sont plus convergentes, que ne l'est aucune progression géométrique décroissante.*

Il ne serait pas tout à fait exact de dire que c'est le premier développement en fraction continue d'une fonction – ce qui est bien plus qu'un nombre ! Euler avait développé *exp(x)* à partir d'équations différentielles. Mais, si l'on compare ce développement à notre découpage de la preuve de Lambert, des trois étapes, Euler n'avait guère réalisé que la première : on est donc en présence d'un tournant remarquable dans l'approximation des fonctions.

6. Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, 1949 (réédition J. Gabay 1987).



<u>Figure 3 :</u> Approximants de la fonction tangente employés par Lambert.
La notation f_n sous les courbes désigne la réduite qui prend en compte les dénominateurs partiels jusqu'à $\upsilon^2/2n$.

L'Irrationalité, enfin ! §35 à 51

Il s'agit là d'adapter aux fractions continues quelconques le critère employé par Euler pour les fractions continues régulières : c'est toujours le « *s'en servir, mais d'une autre façon* » des §3, 16... Il écrit donc le développement et les réduites pour $\upsilon = \Phi/\omega$, Φ et ω étant des entiers. L'idée est simplement celle-ci : si tan Φ/ω est un rationnel, lui aussi écrit comme quotient M/P de deux entiers, les quotients partiels issus du développement de *tan* υ correspondront à l'application de l'algorithme d'Euclide à M et P. D'un côté, celui-ci devrait donc se terminer ; d'un autre, on construira une suite infinie d'entiers strictement décroissante, d'où la contradiction. Cette décroissance sans fin a pour source le fait que tous les quotients partiels sont inférieurs à 1 à partir d'un certain rang : Φ et ω sont fixes, alors que le dénominateur est successivement multiplié par 3, 5, 7, 9, … La preuve de Lambert est longue, alors que Lebesgue (*op. cit.*) la donne en moins d'une page; aussi conseillerons-nous au lecteur de ne pas trop s'attarder à ce passage du texte en première lecture, afin de ne pas perdre le fil général : il admettra avec profit le lemme[7] :

Soit $x = \frac{a_1}{b_1 +}\ \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_k}{b_k +} \cdots$ une fraction continue telle que $\forall k,\ 1 + |a_k| < |b_k|$, avec a_k et b_k entiers supérieurs ou égaux à 1, alors $|x| < 1$ et x est irrationnel.

Observons enfin que, si l'on connaissait bien, depuis Lord Brouncker (1655) un développement de π en fraction continue généralisée

$$\Pi = \frac{1}{1+}\ \frac{1^2}{2+}\ \frac{3^2}{2+}\ \frac{5^2}{2+}\ \frac{7^2}{2+} \cdots,$$

le critère précédent ne s'y appliquait pas : la fraction ne convergeait pas assez rapidement. Le procédé de Lambert était donc parfaitement novateur !

Les §52 à 72 sont de peu d'intérêt pour un lecteur d'aujourd'hui. On les sautera donc sans perte, au moins en première lecture.

Des Fonctions Circulaires aux Fonctions Hyperboliques : §73 à 80

Dès le §4, Lambert avait prévenu, juste après avoir écrit les développements en série de cos et sin :

> *Comme dans ce qui suivra je donnerai deux suites pour l'hyperbole qui ne différeront de ces deux qu'en ce que tous les signes sont positifs....*

Il pose alors les deux séries, qu'il somme en termes d'exponentielles, par exemple

7. Dont il trouvera le détail dans le livre de Lebesgue, *op. cit*.

$$\frac{e^{\upsilon} - e^{-\upsilon}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \upsilon^{2k+1},$$

et développe leur quotient en observant que la seule différence est le remplacement de tous les signes – par des +

$$\frac{e^{\upsilon} - e^{-\upsilon}}{e^{\upsilon} + e^{-\upsilon}} = \cfrac{\upsilon}{1 + \cfrac{\upsilon^2}{3 + \cfrac{\upsilon^2}{5 + \ldots}}}$$

Les notations d'aujourd'hui (*cosh*, *sinh*, *tanh*) ne sont pas encore présentes, mais l'essentiel n'est pas là : non content d'observer que l'on passe des secondes aux premières en changeant υ en $i\upsilon$ – Euler l'avait fait avant lui ! – il tient à en donner une interprétation géométrique, figure à l'appui, en joignant au cercle $x^2 + y^2 = 1$ l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, tangente en son sommet A (1,0) au cercle.

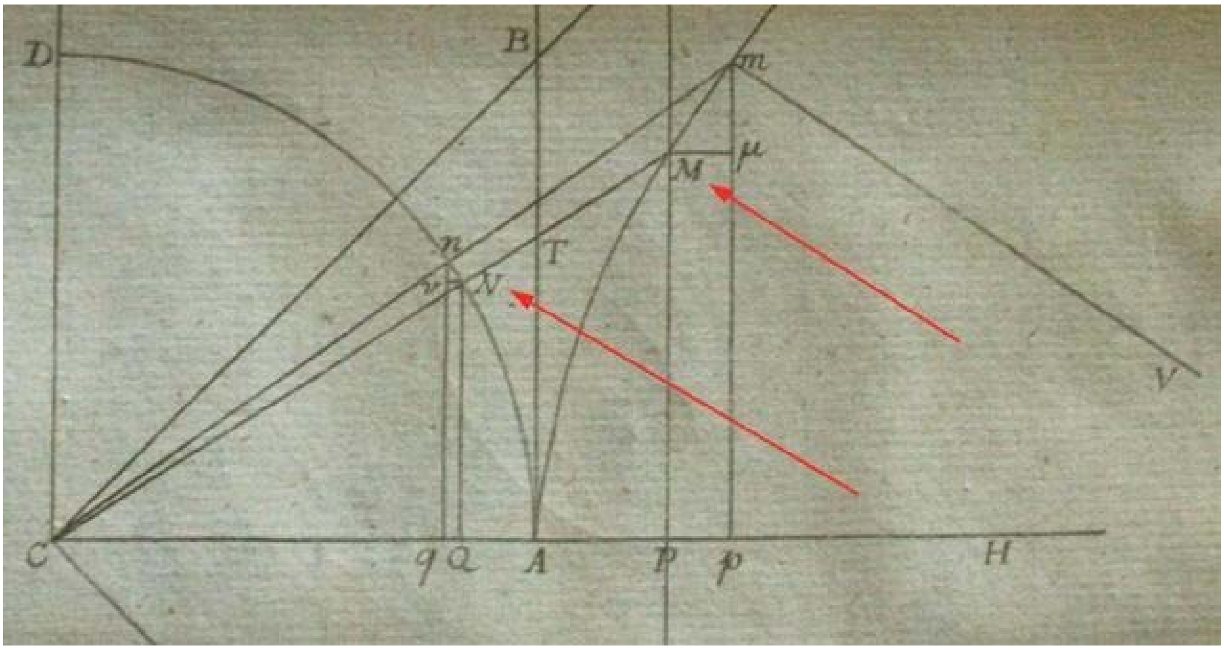


Figure 4 : Planche jointe à la fin de l'article de Lambert (détail).
On reconnaît le tracé du quart de cercle AD et de la branche d'hyperbole AM. On a fléché en rouge les points courants M sur l'hyperbole et N sur le cercle (photographie A. Juhel).

Une sécante commune est issue du centre C des deux coniques, coupe le cercle en N(x,y) et l'hyperbole en M(ξ,η) ; introduisant le paramètre *u* comme double de l'aire du secteur hyperbolique AMCA, Lambert démontre que

$$\xi = \cosh(u),\ \eta = \sinh(u),\ y/x = \tan(\varphi) = \tanh(u) = \xi / \eta$$

De la même manière que les fonctions *cos(φ)* et *sin(φ)* paramètrent le cercle, les fonctions *cosh(u)* et *sinh(u)* paramètrent l'hyperbole : nous venons donc d'assister, aux notations près, à la naissance des fonctions hyperboliques.

Au delà d'Euler, l'irrationalité de *exp(n)* et *exp(1/n)* : § 81 à 88

Euler disposait du développement de *tanh(u)*, mais, soucieux de retrouver des développements en fractions continues régulières, n'avait pu aller que jusqu'à l'irrationalité de e^2. La méthode de Lambert lui donne plus, *u* et *exp(u)* ne peuvent être simultanément rationnelles (§81) :

> *tout logarithme hyperbolique rationnel est celui d'un nombre irrationnel* [...] *tout nombre rationnel a un logarithme hyperbolique irrationnel.*

Et, lorsque *u* est entier ou inverse d'un entier, il conclut

> *Ces fractions nous font connaître à quel point l'irrationalité du nombre e = 2,718281828... est transcendante, en ce qu'aucune de ses dignités*[8] *ni aucune des ses racines n'est rationnelle.*

Le grand mot – transcendance – est lâché, pourtant il n'a ici qu'un sens encore vague : irrationnel au delà de tout ce que l'on pourrait imaginer. Ce sens était déjà présent dans son annonce à la fin du §2 :

> [Cet énoncé] *fait encore voir jusqu'à quel point les quantités circulaires transcendantes sont transcendantes, & reculées au delà de toute commensurabilité.*

Mais les trois derniers paragraphes vont aller bien au delà, et indiquer le chemin, tant à Wantzel pour les questions de constructibilité qu'à Hermite pour la démonstration de la transcendance du nombre *e*.

8. On emploie aujourd'hui le terme « puissances ».

La Conjecture de Transcendance : vers l'inconstructibilité, §89 à 91

D'emblée, Lambert se fait prophétique:

> *Tout ce que je viens de faire voir sur les quantités transcendantes circulaires & logarithmiques, paraît être fondé sur des principes beaucoup plus universels, mais qui ne sont pas encore assez développés. Voici cependant ce qui pourrait servir à en donner quelque idée.*

Suit la définition moderne d'un nombre algébrique ! Car non seulement Lambert donne une liste d'exemples explicites suggérant un "empilement" arbitraire de radicaux de tous ordres et d'opérations algébriques entre eux

> *il y a encore une infinité d'autres* [quantités] *qu'on nomme algébriques : & telles sont toutes les quantités irrationnelles radicales, comme* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, *& c,* $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, *&c. & toutes les racines irrationnelles des équations algébriques.*

mais surtout il définit comme tels les racines d'équations d'ordre quelconque à coefficients entiers, hors de toute formule explicite :

> *& toutes les* racines irrationnelles des équations algébriques *comme par exemple celles des équations* $x^3 - 5x + 1$, *&c*

le *&c (etc.)* suggérant clairement un degré quelconque, ainsi $x^5 - 5x + 1$, pour laquelle il n'y a pas de formule de résolution connue (théorème d'Abel-Ruffini), et plus généralement $x^n - 5x + 1$, avant de conclure :

> *& voici le théorème, que je crois pouvoir être démontré.*
>
> *Je dis donc qu'aucune quantité transcendante circulaire & logarithmique ne saurait être exprimée par quelque quantité irrationnelle radicale, qui se rapporte à la même unité & dans laquelle il n'entre aucune quantité transcendante.*

En effet, il convient de préciser la nature des coefficients : *e* est racine de l'équation $x - e = 0$ … mais les coefficients ne sont pas rationnels (*se rapporte à la même unité*) et, mettant *e* pour coefficient, il y *entrerait une quantité transcendante*. Le théorème dit donc que *e* ou π – entre autres – ne sont racines d'aucune équation à coefficients rationnels ou, ce qui revient au même après réduction au même dénominateur, entiers.

Les derniers mots seront consacrés aux problèmes de constructibilité et à la quadrature du cercle. S'il ne démontre plus rien, Lambert affiche une vision parfaitement claire:

> *Ce théorème étant une fois démontré dans toute son universalité, il s'en suivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationnelle, il n'y aura pas moyen de la déterminer par quelque construction géométrique.*

Résoudre la quadrature du cercle, ce serait construire $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas, et donc π, or

> *tout ce qu'on peut construire géométriquement revient aux quantités rationnelles et radicales.*

Ici, Lambert se montre sans doute lecteur avisé de la *Géométrie* de Descartes, où l'auteur a montré comment construire sommes, produits et racines carrées. D'un autre côté, il n'ignore pas que l'on bute depuis 2000 ans sur un problème contemporain de la quadrature du cercle, la duplication du cube, ou problème de Délos, qui équivaut à la construction de $\sqrt[3]{a}$, *a* rationnel donné. Aussi précise-t-il, fort d'un échec pratique valant conjecture d'impossibilité théorique:

> *& il s'en faut même de beaucoup que ces dernières puissent indifféremment être construites.*

Il faudra pourtant encore trois quarts de siècle pour que Wantzel (1837) résolve définitivement la question. Mais l'intuition de la non-constructibilité était en germe dans la conclusion de l'article de Lambert :

> *On voit bien qu'il en sera de même de tous les arcs de cercles dont la longueur ou les deux points extrêmes sont donnés, soit par des quantités rationnelles, soit par des quantités radicales. Car, si la longueur de l'arc est donnée, il faudra trouver ses deux points extrêmes, en y employant la corde, le sinus, la tangente, ou quelque autre ligne droite qui, pour pouvoir être construite, sera toujours dépendante ou réductible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationnelles ou radicales, ces lignes seront transcendantes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationnelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extrêmes de l'arc sont donnés, j'entends par des quantités rationnelles ou*

radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendante : ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.

■

(février 2009)

(version V2 légèrement modifiée, mars 2015)