
CHAPITRE III.

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN SOLIDE
RECTANGULAIRE INFINI.

SECTION PREMIÈRE.

Exposition de la question.

163.

LES questions relatives à la propagation uniforme ou au mouvement varié de la chaleur dans l'intérieur des solides, sont réduites, par ce qui précède, à des problèmes d'analyse pure, et les progrès de cette partie de la physique dépendront désormais de ceux que fera la science du calcul. Les équations différentielles que nous avons démontrées, contiennent les résultats principaux de la théorie, elles expriment, de la manière la plus générale et la plus concise, les rapports nécessaires de l'analyse numérique avec une classe très-étendue de phénomènes, et réunissent pour toujours aux sciences mathématiques, une des branches les plus importantes de la philosophie naturelle. Il nous reste maintenant à découvrir l'usage que l'on doit faire de ces équations pour en déduire des solutions complètes et d'une application facile. La question suivante offre le premier exemple de l'analyse qui conduit à ces solutions; elle nous

a paru plus propre qu'aucune autre à faire connaître les éléments de la méthode que nous avons suivie.

164.

Nous supposons qu'une masse solide homogène est contenue entre deux plans verticaux B et C parallèles et infinis, et qu'on la divise en deux parties par un plan A perpendiculaire aux deux autres (*voy. fig. 7*); nous allons considérer les températures de la masse B A C comprise entre les trois plans infinis A, B, C. On suppose que l'autre partie B' A C' du solide infini est une source constante de chaleur, c'est-à-dire que tous ses points sont retenus à la température 1, qui ne peut jamais devenir moindre, ni plus grande. Quant aux deux solides latéraux compris l'un entre le plan C et le plan A prolongé, l'autre entre le plan B et le plan A prolongé, tous leurs points ont une température constante 0, et une cause extérieure leur conserve toujours cette même température; enfin les molécules du solide compris entre A, B et C, ont la température initiale 0. La chaleur passera successivement du foyer A dans le solide B A C; elle s'y propagera dans le sens de la longueur qui est infinie, et en même temps elle se détournera vers les masses froides B et C qui en absorberont une grande partie. Les températures du solide B A C s'élèveront de plus en plus; mais elles ne pourront outre-passer ni même atteindre un maximum de température, qui est différent pour les différents points de la masse. Il s'agit de connaître l'état final et constant dont l'état variable s'approche de plus en plus.

Si cet état final était connu et qu'on le formât d'abord, il subsisterait de lui-même, et c'est cette propriété qui le distingue de tous les autres. Ainsi la question actuelle consiste

à déterminer les températures permanentes d'un solide rectangulaire infini, compris entre deux masses de glace B et C et une masse d'eau bouillante A; la considération des questions simples et primordiales est un des moyens les plus certains de découvrir les lois des phénomènes naturels, et nous voyons, par l'histoire des sciences, que toutes les théories se sont formées suivant cette méthode.

165.

Pour exprimer plus brièvement la même question, on suppose qu'une lame rectangulaire BAC, d'une longueur infinie, est échauffée par son extrémité A, et conserve dans tous les points de cette base une température constante 1 , tandis que chacune des deux arêtes infinies B et C, perpendiculaires à la première, est aussi assujétie dans tous ses points à une température constante 0 ; il s'agit de déterminer qu'elles doivent être les températures stationnaires de chaque point de la lame.

On suppose qu'il ne se fait à la superficie aucune déperdition de chaleur, ou, ce qui est la même chose, on considère un solide formé par la super-position d'une infinité de lames pareilles à la précédente; on prend pour l'axe des x la droite $0x$, qui partage la lame en deux moitiés, et les coordonnées de chaque point m sont x et y ; enfin on représente la largeur A de la lame par $2l$, ou, pour abrégé le calcul, par π , valeur de la demi-circonférence.

Concevons qu'un point m de la lame solide BAC, qui a pour coordonnées x et y , ait la température actuelle v , et que les quantités v , qui répondent aux différents points, soient telles qu'il ne puisse survenir aucun changement dans les températures, pourvu que celle de chaque point de la base A soit

toujours 1, et que les côtés B et C conservent dans tous leurs points la température 0.

Si l'on élevait en chaque point m une coordonnée verticale égale à la température v , on formerait une surface courbe qui s'étendrait au-dessus de la lame et se prolongerait à l'infini. Nous chercherons à connaître la nature de cette surface qui passe par une ligne parallèle élevée au-dessus de l'axe des y , à une distance égale à l'unité, et qui coupe le plan horizontal, suivant les deux arêtes infinies parallèles aux x .

166.

Pour appliquer l'équation générale

$$\frac{d v}{d t} = \frac{K}{C.D} \left(\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} + \frac{d^2 v}{d z^2} \right),$$

on considérera que, dans le cas dont il s'agit, on fait abstraction d'une coordonnée z , en sorte que le terme $\frac{d^2 v}{d z^2}$ doit être omis; quant au premier membre $\frac{d v}{d t}$, il s'évanouit, puisqu'on veut déterminer les températures stationnaires; ainsi l'équation qui convient à la question actuelle, et détermine les propriétés de la surface courbe cherchée est celle-ci,

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} = 0 \quad (a).$$

La fonction de x et y , $\varphi(x, y)$ qui représente l'état permanent du solide B A C, doit 1° satisfaire à l'équation (a); 2° devenir nulle lorsqu'on substitue $-\frac{1}{2}\pi$ ou $+\frac{1}{2}\pi$ au lieu de y , quelle que soit d'ailleurs la valeur de x ; 3° elle doit être égale à l'unité, si l'on suppose $x=0$, et si l'on attribue à y

une valeur quelconque comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il faut ajouter que cette fonction $\varphi(x, y)$ doit devenir extrêmement petite lorsqu'on donne à x une valeur très-grande, puisque toute la chaleur sort du seul foyer A.

167.

Afin de considérer la question dans ses éléments, on cherchera en premier lieu les plus simples fonctions de x et y , qui puissent satisfaire à l'équation (*a*); ensuite on donnera à cette valeur de v une expression plus générale, afin de remplir toutes les conditions énoncées. Par ce moyen la solution acquerra toute l'étendue qu'elle doit avoir, et l'on démontrera que la question proposée ne peut admettre aucune autre solution.

Les fonctions de deux variables se réduisent souvent à une expression moins composée, lorsqu'on attribue à l'une des variables ou à toutes les deux une valeur infinie; c'est ce que l'on remarque dans les fonctions algébriques qui, dans ce cas, équivalent au produit d'une fonction de x par une fonction de y . Nous examinerons d'abord si la valeur de v peut être représentée par un pareil produit; car cette fonction v doit représenter l'état de la lame dans toute son étendue, et par conséquent celui des points dont la coordonnée x est infinie. On écrira donc $v = Fx \cdot fy$, substituant dans l'équation *a* et désignant $\frac{d^2(Fx)}{dx^2}$ par $F''x$ et $\frac{d^2(fy)}{dy^2}$ par $f''y$, on aura $\frac{F''(x)}{Fx} + \frac{f''(y)}{fy} = 0$; on pourra donc supposer $\frac{F''x}{Fx} = m$ et $\frac{f''y}{fy} = -m$, m étant une constante quelconque, et comme on se propose seulement de trouver une

valeur particulière de v , on déduira des équations précédentes $F x = e^{-mx}$, $f y = \cos. m y$.

168.

On ne pourrait point supposer que m est un nombre négatif, et l'on doit nécessairement exclure toutes les valeurs particulières de v , où il entrerait des termes tels que e^{mx} , m étant un nombre positif, parce que la température v ne peut point devenir infinie, lorsque x est infiniment grande. En effet la chaleur n'étant fournie que par la source constante A, il ne peut en parvenir qu'une portion extrêmement petite dans les points de l'espace, qui sont très-éloignés du foyer. Le reste se détourne de plus en plus vers les arêtes infinies B et C, et se perd dans les masses froides qu'elles terminent.

L'exposant m qui entre dans la fonction $e^{-mx} \cdot \cos. m y$ n'est pas déterminé, et l'on peut choisir pour cet exposant un nombre positif quelconque : mais, pour que v devienne nulle en faisant $y = -\frac{1}{2} \pi$ ou $y = +\frac{1}{2} \pi$, quelle que soit x , on prendra pour m un des termes de la suite, 1, 3, 5, 7, 9, etc. ; par ce moyen la seconde condition sera remplie.

169.

On formera facilement une valeur plus générale de v , en ajoutant plusieurs termes semblables aux précédents, et l'on aura $v = a e^{-x} \cos. y + b e^{-3x} \cos. 3y + c e^{-5x} \cos. 5y + d e^{-7x} \cos. 7y + \dots$ etc. (b). Il est évident que cette fonction v désignée par $\varphi(x, y)$ satisfait à l'équation $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$, et à la condition $\varphi(x, \pm \frac{1}{2} \pi) = 0$. Il reste

à remplir une troisième condition, qui est exprimée ainsi : $\varphi(o, y) = 1$, et il est nécessaire de remarquer que ce résultat doit avoir lieu lorsqu'on met pour y une valeur quelconque, comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. On ne peut en rien inférer pour les valeurs que prendrait la fonction $\varphi(o, y)$, si l'on mettait au lieu de y une quantité non comprise entre les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. L'équation (b) doit donc être assujétie à la condition suivante :

$$1 = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}$$

C'est au moyen de cette équation que l'on déterminera les coefficients a, b, c, d, \dots etc. dont le nombre est infini.

Le second membre est une fonction de y , qui équivaut à l'unité, toutes les fois que la variable y est comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. On pourrait douter qu'il existât une pareille fonction, mais cette question sera pleinement éclaircie par la suite.

170.

Avant de donner le calcul des coefficients, nous remarquerons l'effet que représente chacun des termes de la série dans l'équation (b).

Supposons que la température fixe de la base A, au lieu d'être égale à l'unité pour tous ses points, soit d'autant moindre que le point de la droite A est plus éloigné du milieu o, et qu'elle soit proportionnelle au cosinus de cette distance; on connaîtra facilement dans ce cas la nature de la surface courbe, dont l'ordonnée verticale exprime la température v ou $\varphi(x, y)$. Si l'on coupe cette surface à l'origine

par un plan perpendiculaire à l'axe des x , la courbe qui termine la section aura pour équation $v = a \cos. y$: les valeurs des coefficients seront les suivantes :

$$a = a, b = 0, c = 0, d = 0,$$

ainsi de suite, et l'équation de la surface courbe sera

$$v = a e^{-x} \cdot \cos. y.$$

Si l'on coupe cette surface perpendiculairement à l'axe des y , on aura une logarithmique dont la convexité est tournée vers l'axe; si on la coupe perpendiculairement à l'axe des x , on aura une courbe trigonométrique qui tourne sa concavité vers l'axe. Il suit de là que la fonction $\frac{d^2 v}{dx^2}$ a toujours une valeur positive, et que celle de $\frac{d^2 v}{dy^2}$ est toujours négative. Or la quantité de chaleur qu'une molécule acquiert à raison de sa place entre deux autres dans le sens des x , est proportionnelle à la valeur de $\frac{d^2 v}{dx^2}$ (art. 123); il s'ensuit donc que la molécule intermédiaire reçoit de celle qui la précède, dans le sens des x , plus de chaleur qu'elle n'en communique à celle qui la suit. Mais, si l'on considère cette même molécule comme placée entre deux autres dans le sens des y , la fonction $\frac{d^2 v}{dy^2}$ étant négative, on voit que la molécule intermédiaire communique à celle qui la suit plus de chaleur qu'elle n'en reçoit de celle qui la précède. Il arrive ainsi que l'excédent de chaleur qu'elle acquiert dans le sens des x , compense exactement ce qu'elle perd dans le sens des y , comme l'exprime l'équa-

tion $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$. On connaît ainsi la route que suit la chaleur qui sort du foyer A. Elle se propage dans le sens des x , et en même temps elle se décompose en deux parties, dont l'une se dirige vers une des arêtes, tandis que l'autre partie continue de s'éloigner de l'origine, pour être décomposée comme la précédente et ainsi de suite à l'infini. La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique, qui répond à la base A, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, pendant que chacune de ses ordonnées décroît à l'infini, proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction.

On tirerait des conséquences analogues, si les températures fixes de la base A étaient exprimées par le terme

$$b \cos. 3y \text{ ou } c \cos. 5y \text{ etc. ;}$$

et l'on peut, d'après cela, se former une idée exacte du mouvement de la chaleur dans les cas plus généraux; car on verra par la suite que ce mouvement se décompose toujours en une multitude de mouvements élémentaires, dont chacun s'accomplit comme s'il était seul.

SECTION II.

Premier exemple de l'usage des séries trigonométriques dans la théorie de la chaleur.

171.

Nous reprendrons maintenant l'équation

$$1 = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}$$

dans laquelle il faut déterminer les coefficients a, b, c, d , etc. Pour que cette équation subsiste, il est nécessaire que les constantes satisfassent aux équations que l'on obtient par des différentiations successives, ce qui donne les résultats suivants :

$$1 = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \sin. y + 3b \sin. 3y + 5c \sin. 5y + 7d \sin. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \cos. y + 3^2 b \cos. 3y + 5^2 c \cos. 5y + 7^2 d \cos. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \sin. y + 3^3 b \cos. 3y + 5^3 c \cos. 5y + 7^3 d \cos. 7y + \text{etc.},$$

ainsi de suite à l'infini.

Ces équations devant avoir lieu lorsque $x = 0$, on aura

$$1 = a + b + c + d + e + f + g + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + \dots \text{ etc.}$$

etc.

Le nombre de ces équations est infini comme celui des indéterminées a, b, c, d, e, \dots etc. La question consiste à éliminer toutes les inconnues, excepté une seule.

172.

Pour se former une idée distincte du résultat de ces éliminations, on supposera que le nombre des inconnues a, b, c, d, \dots etc., est d'abord défini et égal à m . On emploiera les m , premières équations seulement, en effaçant tous les termes

où se trouvent les inconnues qui suivent les m premières. Si l'on fait successivement $m=2, m=3, m=4, m=5$, ainsi de suite, on trouvera dans chacune de ces suppositions, les valeurs des indéterminées. La quantité a , par exemple, recevra une valeur pour le cas de deux inconnues, une autre pour le cas de trois inconnues, ou pour le cas de quatre inconnues, ou successivement pour un plus grand nombre. Il en sera de même de l'indéterminée b , qui recevra autant de valeurs différentes que l'on aura effectué de fois l'élimination; chacune des autres indéterminées est pareillement susceptible d'une infinité de valeurs différentes. Or la valeur d'une des inconnues, pour le cas où leur nombre est infini, est la limite vers laquelle tendent continuellement les valeurs qu'elle reçoit au moyen des éliminations successives. Il s'agit donc d'examiner si, à mesure que le nombre des inconnues augmente, chacune des valeurs a, b, c, d, \dots etc. ne converge point vers une limite finie, dont elle approche continuellement.

Supposons que l'on emploie les sept équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d + e + f + g \\ 0 &= a + 3^1 b + 5^1 c + 7^1 d + 9^1 e + 11^1 f + 13^1 g \\ 0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g \\ 0 &= a + 3^3 b + 5^3 c + 7^3 d + 9^3 e + 11^3 f + 13^3 g \\ 0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g \\ 0 &= a + 3^5 b + 5^5 c + 7^5 d + 9^5 e + 11^5 f + 13^5 g \\ 0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g \\ 0 &= a + 3^7 b + 5^7 c + 7^7 d + 9^7 e + 11^7 f + 13^7 g \\ 0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g \\ 0 &= a + 3^9 b + 5^9 c + 7^9 d + 9^9 e + 11^9 f + 13^9 g \\ 0 &= a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g \\ 0 &= a + 3^{11} b + 5^{11} c + 7^{11} d + 9^{11} e + 11^{11} f + 13^{11} g \\ 0 &= a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g. \end{aligned}$$

Les six équations qui ne contiennent plus g , sont :

$$\begin{aligned}
 13^2 &= a(13^2-1^2) + b(13^2-3^2) + c(13^2-5^2) + d(13^2-7^2) + e(13^2-9^2) + f(13^2-11^2) \\
 0 &= a(13^2-1^2) + 3^2 b(13^2-3^2) + 5^2 c(13^2-5^2) + 7^2 d(13^2-7^2) + 9^2 e(13^2-9^2) + 11^2 f(13^2-11^2) \\
 0 &= a(13^2-1^2) + 5^4 b(13^2-3^2) + 5^4 c(13^2-5^2) + 7^4 d(13^2-7^2) + 9^4 e(13^2-9^2) + 11^4 f(13^2-11^2) \\
 0 &= a(13^2-1^2) + 3^6 b(13^2-3^2) + 5^6 c(13^2-5^2) + 7^6 d(13^2-7^2) + 9^6 e(13^2-9^2) + 11^6 f(13^2-11^2) \\
 0 &= a(13^2-1^2) + 3^8 b(13^2-3^2) + 5^8 c(13^2-5^2) + 7^8 d(13^2-7^2) + 9^8 e(13^2-9^2) + 11^8 f(13^2-11^2) \\
 0 &= a(13^2-1^2) + 3^{10} b(13^2-3^2) + 5^{10} c(13^2-5^2) + 7^{10} d(13^2-7^2) + 9^{10} e(13^2-9^2) + 11^{10} f(13^2-11^2). \quad (c)
 \end{aligned}$$

En continuant l'élimination, on obtiendra l'équation finale en a , qui est :

$$a(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2) = 13^2 \cdot 11^2 \cdot 9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2.$$

173.

Si l'on avait employé un nombre d'équations plus grand d'une unité, on aurait trouvé, pour déterminer a , une équation analogue à la précédente, ayant au premier membre un facteur de plus, savoir : $15^2 - 1^2$, et au second membre 15^2 , pour nouveau facteur. La loi à laquelle ces différentes valeurs de a sont assujéties est évidente, et il s'ensuit que la valeur de a , qui correspond à un nombre infini d'équations, est exprimée ainsi :

$$a = \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{9^2}{9^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \frac{13^2}{13^2-1} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{ou } a = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdot \dots \text{ etc.}$$

Or cette dernière expression est connue et, suivant le théorème de Wallis, on en conclut $a = \frac{4}{\pi}$. Il ne s'agit

donc maintenant que de connaître les valeurs des autres indéterminées.

174.

Les six équations qui restent après l'élimination de g peuvent être comparées aux six équations plus simples que l'on aurait employées, s'il n'y avait eu que six inconnues. Ces dernières équations diffèrent des équations (c), en ce que, dans celles-ci, les lettres f, e, d, c, b, a se trouvent multipliées respectivement par les facteurs

$$\frac{13^2-11^2}{13^2}, \frac{13^2-9^2}{13^2}, \frac{13^2-7^2}{13^2}, \frac{13^2-5^2}{13^2}, \frac{13^2-3^2}{13^2}, \frac{13^2-1^2}{13^2}$$

Il suit de là que si on avait résolu les six équations linéaires que l'on doit employer dans le cas de six indéterminées, et que l'on eût calculé la valeur de chaque inconnue, il serait facile d'en conclure la valeur des indéterminées de même nom, correspondantes au cas où l'on aurait employé sept équations. Il suffirait de multiplier les valeurs de f, e, d, c, b, a , trouvées dans le premier cas par des facteurs connus. Il sera aisé, en général, de passer de la valeur de l'une des quantités, prise dans la supposition d'un certain nombre d'équations et d'inconnues, à la valeur de la même quantité, prise dans le cas où il y aurait une inconnue et une équation de plus. Par exemple, si la valeur de f trouvée dans l'hypothèse de six équations et six inconnues, est représentée par F , celle de la même quantité prise dans le cas d'une inconnue de plus, sera $F \cdot \frac{13^2}{13^2-11^2}$. Cette même valeur, prise dans le cas de huit inconnues, sera, par la même raison,

$$F \cdot \frac{13^2}{13^2-11^2} \cdot \frac{15^2}{15^2-11^2}$$

et dans le cas de neuf inconnues, elle sera

$$F \frac{13^2}{13^2-11^2} \cdot \frac{15^2}{15^2-11^2} \cdot \frac{17^2}{17^2-11^2},$$

ainsi de suite. Il suffira de même de connaître la valeur de b , correspondante au cas de deux inconnues, pour en conclure celle de la même lettre qui correspond au cas de trois, quatre, cinq inconnues, etc. On aura seulement à multiplier cette première valeur de b par

$$\frac{5^2}{5^2-3^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-3^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-3^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-3^2} \dots \text{etc.}$$

Pareillement si l'on connaît la valeur de c pour le cas de trois inconnues, on multipliera cette valeur par les facteurs successifs

$$\frac{7^2}{7^2-5^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-5^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-5^2} \dots \text{etc.}$$

on calculera de même la valeur de d par le cas de quatre inconnues seulement, et on multipliera cette valeur par

$$\frac{9^2}{9^2-5^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-7^2} \cdot \frac{13^2}{13^2-7^2} \cdot \frac{15^2}{15^2-7^2} \dots \text{etc.}$$

Le calcul de la valeur de a est assujéti à la même règle, car si on prend cette valeur pour le cas d'une seule inconnue, et qu'on la multiplie successivement par

$$\frac{3^2}{3^2-1^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-1^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-1^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-1^2},$$

on trouvera la valeur finale de cette quantité.

175.

La question est donc réduite à déterminer la valeur de a dans le cas d'une inconnue, la valeur de b dans le cas de deux inconnues, celle de c dans le cas de trois inconnues, et ainsi de suite pour les autres inconnues.

Il est facile de juger, à l'inspection seule des équations et sans aucun calcul, que les résultats de ces éliminations successives doivent être

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{1^2}{1^2-3^2} \\ c &= \frac{1^2}{1^2-5^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-5^2} \\ d &= \frac{1^2}{1^2-7^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-7^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-7^2} \\ e &= \frac{1^2}{1^2-9^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-9^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-9^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-9^2} \end{aligned}$$

176.

Il ne reste qu'à multiplier les quantités précédentes par les séries des produits qui doivent les compléter et que nous avons donnés (art. 174). On aura en conséquence, pour les valeurs finales, des inconnues a, b, c, d, e, f , etc., les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot \frac{3^2}{3^2-1^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-1^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-1^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-1^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-1^2} \text{ etc.} \\ b &= \frac{1^2}{1^2-3^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-3^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-3^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-3^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-3^2} \text{ etc.} \\ c &= \frac{1^2}{1^2-5^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-5^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-5^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-5^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-5^2} \text{ etc.} \\ d &= \frac{1^2}{1^2-7^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-7^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-7^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-7^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-7^2} \text{ etc.} \\ e &= \frac{1^2}{1^2-9^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-9^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-9^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-9^2} \cdot \frac{11^2}{11^2-9^2} \cdot \frac{13^2}{13^2-9^2} \text{ etc.} \\ f &= \frac{1^2}{1^2-11^2} \cdot \frac{3^2}{3^2-11^2} \cdot \frac{5^2}{5^2-11^2} \cdot \frac{7^2}{7^2-11^2} \cdot \frac{9^2}{9^2-11^2} \cdot \frac{13^2}{13^2-11^2} \cdot \frac{15^2}{15^2-11^2} \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$\text{ou } a = +1 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \text{ etc.}$$

$$b = -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 10} \cdot \frac{9 \cdot 9}{6 \cdot 12} \text{ etc.}$$

$$c = +\frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 7}{1 \cdot 12} \cdot \frac{9 \cdot 9}{4 \cdot 14} \cdot \frac{11 \cdot 11}{6 \cdot 16} \text{ etc.}$$

$$d = -\frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 8} \cdot \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 10} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 12} \cdot \frac{9 \cdot 9}{2 \cdot 16} \cdot \frac{11 \cdot 11}{4 \cdot 18} \cdot \frac{13 \cdot 13}{6 \cdot 20} \text{ etc.}$$

$$e = +\frac{1 \cdot 1}{8 \cdot 10} \cdot \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 12} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 14} \cdot \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 16} \cdot \frac{11 \cdot 11}{2 \cdot 20} \cdot \frac{13 \cdot 13}{4 \cdot 22} \cdot \frac{15 \cdot 15}{6 \cdot 24} \text{ etc.}$$

$$f = -\frac{1 \cdot 1}{10 \cdot 12} \cdot \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 14} \cdot \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 16} \cdot \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 18} \cdot \frac{9 \cdot 9}{2 \cdot 20} \cdot \frac{13 \cdot 13}{2 \cdot 24} \cdot \frac{15 \cdot 15}{4 \cdot 26} \cdot \frac{17 \cdot 17}{6 \cdot 28} \text{ etc.}$$

La quantité $\frac{1}{2} \pi$ ou le quart de la circonférence équivaut, suivant le théorème de Wallis, à

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15} \text{ etc.}$$

Si l'on remarque maintenant quelles sont, dans les valeurs de a, b, c, d, e , etc., les facteurs que l'on doit écrire aux numérateurs et aux dénominateurs, pour y compléter la double série des nombres impairs et des nombres pairs, on trouvera que les facteurs à suppléer sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } b \quad \frac{3 \cdot 3}{6} \\ \text{pour } c \quad \frac{5 \cdot 5}{10} \\ \text{pour } d \quad \frac{7 \cdot 7}{14} \\ \text{pour } e \quad \frac{9 \cdot 9}{18} \\ \text{pour } f \quad \frac{11 \cdot 11}{22} \end{array} \right\} \text{ et l'on en conclut } \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ b = -2 \cdot \frac{2}{3 \pi} \\ c = 2 \cdot \frac{2}{5 \pi} \\ d = -2 \cdot \frac{2}{7 \pi} \\ e = 2 \cdot \frac{2}{9 \pi} \\ f = -2 \cdot \frac{2}{11 \pi} \end{array} \right.$$

177.

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations et à déterminer les coefficients a, b, c, d , etc., de l'équation

$$1 = a \cos. x + b \cos. 3x + c \cos. 5x + d \cos. 7x + e \cos. 9x, + \text{etc.}$$

La substitution de ces coefficients, donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \cos. y - \frac{1}{3} \cos. 3y + \frac{1}{5} \cos. 5y - \frac{1}{7} \cos. 7y \\ + \frac{1}{9} \cos. 9y - \frac{1}{11} \cos. 11y + \text{etc.} \end{aligned}$$

Le second membre est une fonction de y , qui ne change point de valeur quand on donne à la variable y une valeur comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente, c'est-à-dire que, en mettant au lieu de y un nombre quelconque, et en poursuivant le calcul des coefficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe, en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés, devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration, que le lecteur peut suppléer, nous ferons remarquer que la valeur fixe, dont on approche continuellement, est $\frac{1}{4}\pi$, si la valeur attribuée à y est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, mais qu'elle est $-\frac{1}{4}\pi$, si y est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$; car, dans ce second intervalle, chaque terme de la série change de signe. En général la limite de la série est alternativement positive et négative; au reste, la convergence n'est

point assez rapide pour procurer une approximation facile ,
mais elle suffit pour la vérité de l'équation.

178.

L'équation

$$y = \cos. x - \frac{1}{3} \cos. 3 x + \frac{1}{5} \cos. 5 x - \frac{1}{7} \cos. 7 x + \text{etc.} ,$$

appartient à une ligne qui, ayant x pour abscisse et y pour ordonnée, est composée de droites séparées dont chacune est parallèle à l'axe et égale à la demi-circonférence. Ces parallèles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, à la distance $\frac{1}{4} \pi$, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne. Pour se former une idée exacte de la nature de cette ligne, il faut supposer que le nombre des termes de la fonction

$$\cos. x - \frac{1}{3} \cos. 3 x + \frac{1}{5} \cos. 5 x - \text{etc.}$$

reçoit d'abord une valeur déterminée. Dans ce dernier cas l'équation

$$y = \cos x - \frac{1}{3} \cos. 3 x + \frac{1}{5} \cos. 5 x - \text{etc.}$$

appartient à une ligne courbe qui passe alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, en le coupant toutes les fois que l'abscisse x devient égale à l'une des quantités

$$0, \pm \frac{1}{2} \pi, \pm \frac{3}{2} \pi, \pm \frac{5}{2} \pi. \text{ etc.},$$

a mesure que le nombre des termes de l'équation augmente, la courbe dont il s'agit tend de plus en plus à se confondre avec la ligne précédente, composée de droites parallèles et

de droites perpendiculaires; en sorte que cette ligne est la limite des différentes courbes que l'on obtiendrait en augmentant successivement le nombre des termes.

SECTION III.

Remarques sur ces séries.

179.

On peut envisager ces mêmes équations sous un autre point de vue, et démontrer immédiatement l'équation

$$\frac{\pi}{4} = \cos. x - \frac{1}{3} \cos. 3x + \frac{1}{5} \cos. 5x - \frac{1}{7} \cos. 7x + \frac{1}{9} \cos. 9x - \text{etc.}$$

Le cas où x est nulle se vérifie par la série de Léibnitz,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

Ensuite on supposera que le nombre des termes de la série

$$\cos. x - \frac{1}{3} \cos. 3x + \frac{1}{5} \cos. 5x - \frac{1}{7} \cos. 7x + \text{etc.}$$

au lieu d'être infini est déterminé et égal à m . On considérera la valeur de cette suite finie comme une fonction de x et de m . On réduira la valeur de la fonction en une série ordonnée suivant les puissances négatives de m ; et l'on reconnaîtra que cette valeur approche d'autant plus d'être constante et indépendante de x , que m est un plus grand nombre.

Soit y la fonction cherchée qui est donnée par l'équation;

$$y = \cos. x - \frac{1}{3} \cos. 3x + \frac{1}{5} \cos. 5x - \frac{1}{7} \cos. 7x + \dots + \frac{1}{2m-1} \cos. 2m-1x,$$